وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التقني العمارة
قسم تقنيات المدني

الحقيبة التدريسية لمادة
الرياضيات

الصف الاول

تدريسي المادة
م.م ساره فوزي غافل

الفصل الدراسي الاول

جدول مفردات مادة الرياضيات

الاسبوع	المفردات
1	المصفوفات المحددات خواصها
2	حل المعادلات الخطية طريقة كرامر تطبيقات على المحددات
3	المتجهات تحليل المتجهات الكميات المتجهة والقياسية جبر المتجهات
4	وحده المتجهات المتعامد مقياس المتجهة الضرب القياسي
5	الدالة الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية
6	الدالة الاسية دوال القطع الزائد وتطبيقاتها
7	الغايات غاية الدوال الجبرية والمثلثية
8	المتواليات
9	التفاضل المشتقة مشتقة الدوال الجبرية
10	الدوال المنحنية الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا
11	مشتقة الدوال المثلثية واللوغارتمية
12	مشتقة الدالة الاسية والزائدية
13	تطبيقات المشتقة معادلة المماس والعمود
14	الاسس واللوغاريتمات
15	تطبيقات فيزياوية ورسم الدوال

الهدف من دراسة مادة الرياضيات (الهدف العام):

تعلم الطالب الطرق المختلفة في تمثيل المعادلات والقوانين الرياضية والمعطيات المختلفة على تشكيل منحنيات في رسم بياني وبانواع مختلفة من المخططات تتناسب والغرض من رسمها

الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول / قسم تقنيات المدني

التقنيات التربوية المستخدمة:

1. سبورة واقلام
2. السبورة التفاعلية
3. عارض البيانات Data Show
4. جهاز حاسوب محمول Laptop
5. مختبر الحاسبات

الاسبوع الأول

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم المصفوفات لتجميع البيانات ولتحديد وتمثيل التحويلات الهندسية وتغير الاحداثيات في التحليل العددي

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المصفوفات المحددات خواصها

2. المصفوفات Matrices

عند معالجة منظومة المعادلات الخطية سابقاً وجدنا أنما يهمنا هو المعاملات ومواضعها في هذه المنظومة و عند إرجاعها بالصيغة المدرجة من الضروري الحفاظ على ترتيب المجاهيل من المعادلات وعندئذٍ يمكن ترتيب المعاملات بشكل مستطيلي يسمى مصفوفة (Matrix). في هذا البند سوف نتعرف على مفهوم المصفوفة و دراسة بعض أنواع المصفوفات و العمليات عليها و كذلك دراسة الخواص الأساسية لها.

المصفوفة : عبارة عن مجموعة من الأعداد تنتمي الى حقل معين (F) عناصرها مرتبة في جدول مستطيل، يسمى كل سطر أفقي من عناصر المصفوفة صفاً (row) و يسمى كل سطر رأسي عموداً (column). عادة ما يرمز للمصفوفة بأحد الأحرف الانكليزية الكبيرة مثل A, B, C ... الخ.

ملاحظات :

1) غالباً ما يكون الحقل (F) المعرفة عليه المصفوفة هو مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) أو مجموعة الأعداد المعقدة (Complex numbers).

2) المصفوفة A التي لها m من الصفوف و n من الأعمدة تكتب على النحو الآتي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

و نقول ان المصفوفة A ذات سعة (درجة) $m \times n$ حيث m يمثل عدد صفوف المصفوفة A و n يمثل عدد أعمدة المصفوفة A . يرمز للعنصر في المصفوفة A بشكل عام بـ a_{ij} حيث i يمثل رقم الصف الموجود فيه العنصر a_{ij} و يمثل j رقم العمود الموجود فيه العنصر a_{ij} حيث $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

3) في كثير من الأحيان سوف نرمز للمصفوفة ببساطة بالصيغة المختزلة $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ أو $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ اذا كانت سعة المصفوفة معروفة ضمنياً، حيث (الحقل F) $a_{ij} \in$.

أمثلة : 1) لتكن $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ، من الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×2 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R .

2) لتكن $A=\begin{bmatrix} i & 2-i & 1 \\ -i & 0 & 1+i \end{bmatrix}$ ، حيث $i=\sqrt{-1}$. فمن الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×3 معرفة على حقل الأعداد المعقدة C .

بعض المصفوفات الخاصة Some special matrices

المصفوفة الصفرية (Zero matrix): يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ بأنها مصفوفة صفرية اذا كانت جميع عناصر المصفوفة أصفار أي ان $a_{ij}=0$ لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

مثال : اكتب مصفوفة صفرية سعة 4×3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل : المصفوفة هي $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ملاحظة : تسمى المصفوفة الصفرية بمصفوفة المحايد الجمعي وسوف نرمز لها بالرمز 0 .

المصفوفة المربعة (Square matrix): يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ بأنها مصفوفة مربعة اذا كانت $m=n$ (أي عدد صفوف A = عدد أعمدة A). و غالباً ما يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ بأنها مصفوفة مربعة ذات سعة n (أي ذات سعة $n\times n$).

مثال : اكتب مصفوفة مربعة ذات سعة 3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل: المقصود بالمصفوفة ذات سعة 3 أي ذات سعة 3×3 وهي على سبيل المثال $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

خواص المحددات

سنقدم الخواص الأساسية للمحددات وكذلك نقدم علاقة هامة جداً بين قيمة محدد مصفوفة و وجود معكوس لها.

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة و تحتوي صف (أو عمود) جميع عناصره أصفار فان $|A|=0$.

البرهان : نفرض ان $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n و ليكن r_k صف جميع عناصره أصفار ، عليه كل حد من حدود $|A|$ يحتوي على عنصر من الصف r_k ، لذا يكون ذلك الحد مساوي للصفر ، اذن $|A|=0$.

مبرهنة : اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال صفين (أو عمودين) فان $|B|=-|A|$.

البرهان : نفرض ان $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n ونفرض ان المصفوفة B حصلنا عليها بعد تبديل صفين من صفوف المصفوفة A . عليه اذا كان $n=2$ فان $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ لذلك $|B|=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-|A|$. اذا كان $n>2$ فأننا سوف نستخدم الصف i لحساب $|B|$ (على افتراض ان i ليس احد الصفين المبدلين) لذلك نحصل على :

$$|B|=(-1)^{i+1}a_{i1}|B_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|B_{i2}|+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}|B_{in}|$$

نلاحظ ان B_{ij} هي المصفوفة التي نحصل عليها بعد إبدال صفين من المصفوفة A_{ij} . اذا كان $n=3$ فان B_{ij} من السعة 2 و باستخدام حالة $n=2$ نحصل على $|B_{ij}|=-|A_{ij}|$ أي ان

$$\begin{aligned}|B|&=(-1)^{i+1}a_{i1}(-|A_{i1}|)+(-1)^{i+2}a_{i2}(-|A_{i2}|)+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}(-|A_{in}|)\\ &=-[(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|]=-|A|\end{aligned}$$

و بالتالي $|B|=-|A|$. أما اذا كان $n>3$ فأننا نكرر الخطوات السابقة حتى نصل الى النتيجة.
ان برهان حالة تبديل عمودين مشابهة لبرهان حالة تبديل صفين .

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة و تحتوي على صفين (أو عمودين) متساويين فان $|A|=0$.

البرهان : نفرض ان $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n و ليكن r_i و r_j صفين متساوين فيها. نفرض ان المصفوفة B ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال الصفين r_i و r_j. نلاحظ ان $A=B$ وعليه $|A|=|B|$ ... (1).

لكن بواسطة المبرهنة السابقة يكون لدينا $|B|=-|A|$ ...(2) . من الحالتين (1) و (2) نحصل على ان $|A|=|B|=-|A|$ يؤدي الى ان $|A|=-|A|$ أي ان $2|A|=0$ و لذلك $|A|=0$.

<u>مبرهنة</u> : كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب صف (أو عمود) بثابت k فان $|B|=k|A|$.

البرهان: نفرض ان $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مربعة سعة n و لتكن

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & ka_{1j} & . & . & a_{1n} \\ . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . \\ a_{i1} & . & . & ka_{ij} & . & . & a_{in} \\ . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . \\ a_{n1} & . & . & ka_{nj} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

سوف نحسب محدد B باستخدام العمود j فنحصل على :

$$\begin{aligned} |B| &= (-1)^{1+j}ka_{1j}|B_{1j}| + (-1)^{2+j}ka_{2j}|B_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j}ka_{nj}|B_{nj}| \\ &= k[(-1)^{1+j}a_{1j}|B_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|B_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}|B_{nj}|] \\ &= k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|B_{ij}| = k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \end{aligned}$$

و ذلك لان $A_{ij}=B_{ij}$ لكل j . عليه نحصل على ان $|B|=k|A|$.

<u>مبرهنة</u> : اذا كانت $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مثلثية عليا (أو سفلى) من السعة n فان $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}..a_{nn}$.

البرهان : سوف نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي في البرهان . نفرض ان A مصفوفة مثلثية عليا .

اذا كان $n=2$ أي ان $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ و لذلك فان $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}.0=a_{11}a_{22}$. عليه العبارة تكون صحيحة عندما تكون $n=2$. نفرض ان العبارة صحيحة عندما تكون $n=k$ أي انه اذا كان $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{kk}$ فان $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}..a_{kk}$. سوف نبرهن ان العبارة تبقى صحيحة عندما $n=k+1$.

لتكن
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$
مصفوفة مثلثية عليا من السعة $k+1$

فان $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+(-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}|+\ldots+(-1)^{K+2}a_{1(k+1)}|A_{1(K+1)}|$

لكن لدينا $|A_{12}|=|A_{13}|=\ldots=|A_{1(K+1)}|=0$ (كون كل مصفوفة تحوي عمود عناصره جميعها أصفار).

عليه $|A|=a_{11}|A_{11}|$ حيث ان
$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2(k+1)} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$
مصفوفة مربعة من السعة k.

لذلك بواسطة احتمال $n=k$ يكون $|A_{11}|=a_{22}a_{33}a_{44}..a_{(k+1)(k+1)}$ وبالتالي $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}..a_{(k+1)(k+1)}$.

تمرين :

(1) برهن انه اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة قطرية من السعة n فان $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}..a_{nn}$.

(2) برهن انه اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة محايدة من السعة n فان $|A|=1$.

(3) برهن انه اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب احد الصفوف (أو الأعمدة) بثابت غير صفري وإضافة الناتج الى صف (أو عمود) آخر فان $|A|=|B|$.

(4) اذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من السعة n وليكن k ثابت غير صفري ، اثبت ان :

(a) $|kA|=k^n|A|$ **(b)** $|AB|=|A||B|$ **(c)** $|AB|=|BA|$. هل ان $|A+B|=|A|+|B|$ ؟

تعريف: لتكن A و B مصفوفتين. نقول ان المصفوفتين A و B متكافئتان صفياً (تكتب رياضياً $A \sim B$) اذا حصلنا على احدهما من الأخرى بإجراء أي عدد منته من العمليات الصفية الأولية.

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ أربعة مصفوفات .

فان $A \sim B$ لان المصفوفة B ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب الصف الأول بـ (1-) و إضافة الناتج للصف الثاني. كذلك $A \sim C$ لان المصفوفة C ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال الصف الأول مع الثاني و من ثم ضرب الصف الأول بـ ($\frac{1}{2}$) . بينما المصفوفتين A و D غير متكافئتان صفياً .

المبرهنة التالية تقدم لنا الشرط اللازم و الكافي لمعرفة متى يكون لمصفوفة ما معكوس .

مبرهنة : المصفوفة المربعة A تكون قابلة للعكس اذا فقط اذا كان $|A| \neq 0$.

البرهان : نفرض ان $A \sim B$ حيث B هي الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A . من خلال مبرهنات سابقة نجد ان $|B| = k|A|$ حيث $k \in R$. عليه $|A| \neq 0$ اذا وفقط اذا كان $|B| \neq 0$. من ناحية اخرى $B = I$ أو ان B تحتوي على صف صفري. اذا كان B تحتوي على صف صفري فان $|B| = 0$ وهذا تناقض، اذا يجب ان يكون $B = I$ ، و بالتالي $|A| \neq 0$ اذا وفقط اذا كان A مصفوفة قابلة للعكس .

مثال : بين أي من المصفوفتين التاليتين قابلة للعكس $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}27 & 2 & 1\\ 5 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

الحل : بما ان $|A| = 9 - (-2) = 11$ أي ان $|A| \neq 0$ عليه بواسطة المبرهنة السابقة تكون A قابلة للعكس.

لكن $|B| = 27(0-(-1)) - 2(15-(-1)) + 1(5-0) = 27 - 32 + 5 = 0$ عليه بواسطة المبرهنة السابقة تكون A غير قابلة للعكس.

مثال : جد قيم الثابت الحقيقي k التي تجعل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}k-1 & 1\\ 2 & k\end{bmatrix}$ قابلة للعكس .

الحل: بما ان A مصفوفة قابلة للعكس اذن $|A|\neq 0$، أي ان $\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix}\neq 0$ لذلك $(k-1)k-2\neq 0$

عليه $k^2-k-2\neq 0$ يؤدي الى ان $(k-2)(k+1)\neq 0$ لذلك $k-2\neq 0$ و $k+1\neq 0$ أي ان

$k\neq 2$ و $k\neq -1$. اذن قيم k هي $R-\{-1,2\}$.

مبرهنة للإطلاع : (1) المصفوفة المربعة A تكون قابلة للعكس اذا فقط اذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب عدد منته من مصفوفات أولية، أي ان $A=E_1E_2E_3\ldots E_t$ حيث $E_1,E_2,\ldots,E_t$ مصفوفات أولية.

(2) اذا كانت E مصفوفة أولية فان $|E|=|E^T|$.

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة فان $|A|=|A^T|$.

البرهان : نفرض A مصفوفة مربعة. اذا كانت <u>A مصفوفة قابلة للعكس</u> فان A^T أيضاً تكون مصفوفة قابلة للعكس ، و بواسطة المبرهنة السابقة (1)، نستطيع كتابة $A=E_1E_2E_3\ldots E_t$ حيث ان $E_1,E_2,\ldots,E_t$ هي مصفوفات أولية، و لذلك $A^T=(E_1E_2E_3\ldots E_t)^T=E_t^T\ldots E_3^TE_2^TE_1^T$ ، و بالتالي يكون لدينا

لان $E_1,E_2,\ldots,E_t$ مصفوفات أولية $|A|=|E_1E_2E_3\ldots E_t|=|E_1||E_2||E_3|\ldots|E_t|=|E_1^T||E_2^T||E_3^T|\ldots|E_t^T|$

(بواسطة المبرهنة السابقة (2)) $=|E_t^T|\ldots|E_3^T||E_2^T||E_1^T|$

$=|E_t^T\ldots E_3^TE_2^TE_1^T|=|A^T|$

اذا كانت <u>A مصفوفة غير قابلة للعكس</u> فمن الواضح ان A^T تكون أيضاً مصفوفة غير قابلة للعكس وعليه $|A|=0=|A^T|$. من الحالتين نستنتج أن $|A|=|A^T|$.

الاسبوع الثاني

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم حل المعادلات الخطية بطريقة كرامر هو فهم العلاقة بين الجبر والمعادلات الخطية وحل انظمة المعادلات بدقة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

حل المعادلات الخطية طريقة كرامر تطبيقات على المحددات

قاعدة كرامر Gramer's Rule

اذا كان لدينا النظام الخطي التالي

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n = b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m$$

و الذي يتكون من m من المعادلات و n من المجاهيل . فيمكننا تحويله على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ & & & . & & & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ & & & . & & & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات ، $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$ تسمى

مصفوفة المجاهيل و $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ تسمى بمصفوفة الحدود المطلقة (الثوابت) .

عليه فالشكل النهائي للنظام الخطي يكافئ المعادلة المصفوفية $AX=B$. عندئذٍ الحل الوحيد للنظام أعلاه باستخدام قاعدة كرامر هو $X_1=\frac{|A_1|}{|A|}$ ، $X_2=\frac{|A_2|}{|A|}$ ، $X_3=\frac{|A_3|}{|A|}$ ، . . . ، $X_n=\frac{|A_n|}{|A|}$.

حيث A_j هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B بدلاً من العمود j .

ملاحظة : يمكننا استخدام قاعدة كرامر لحل النظام الخطي اذا توفرت الشروط التالية في النظام :

(1) يجب ان تكون عدد معادلات النظام تساوي عدد المجاهيل .
(2) يجب ان يكون محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي صفر(أي ان المصفوفة A قابلة للعكس).
(3) طريقة كرامر تُعطينا حل وحيد للنظام .

مثال : جد حل المنظومة الخطية التالية

$$X_1-2X_2=3$$
$$X_1+X_2=1$$.

الحل : سوف نكتب النظام الخطي بصيغة معادلة مصفوفية على النحو التالي $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

حيث $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. نلاحظ ان عدد معادلات النظام = عدد المجاهيل = 2 .

كذلك $|A|=3$ أي ان $|A|\neq 0$ ، عليه سوف نستخدم طريقة كرامر لحل هذه المنظومة الخطية و كالآتي :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3} \quad ، \qquad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2}{3}$$

اذن للنظام حل وحيد هو $X_1 = \frac{5}{3}$ و $X_2 = \frac{-2}{3}$.

<u>مثال</u> : جد حل المنظومة الخطية التالية

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 &= 6 \\ 2X_1 + X_2 + X_4 &= -1 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 - 2X_4 &= 5 \\ 3X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4 &= -2 \end{aligned}$$

الحل : سوف نكتب النظام الخطي بصيغة معادلة مصفوفية على النحو التالي

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. نلاحظ ان عدد معادلات النظام = عدد المجاهيل = 4 . كذلك $|A| = -32$ أي ان $|A| \neq 0$ ، عليه سوف نستخدم طريقة كرامر لحل هذه المنظومة الخطية و كالآتي :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -32 \quad ، \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 32$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 64 \quad ، \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -64$$

لذلك يكون $X_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = -2$ ، $X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$ ، $X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -1$ ، $X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1$.

اذن للنظام حل وحيد هو $X_1 = 1$ ، $X_2 = -1$ ، $X_3 = 2$ ، $X_4 = -2$.

<u>**تمرين**</u> **: (1)** جد حل النظامين الخطيين التاليين باستخدام قاعدة كرامر

$$\begin{aligned} X_1 - 3X_2 - X_3 &= -7 \\ X_1 - X_2 - X_3 &= -2 \\ X_1 - 6X_2 - 2X_3 &= -3 \end{aligned} \quad ، \quad \begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &= 7 \\ 8X_1 + X_2 &= -2 \end{aligned} \; .$$

(2) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة X_3 التي تحقق النظام :

$$\begin{aligned} X_1 + 4X_2 - 2X_3 - X_4 &= 32 \\ 2X_1 - X_2 + 7X_3 + 9X_4 &= 14 \\ -X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 &= 11 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 + 4X_4 &= 4 \end{aligned}$$

(3) عين قيم k التي تجعل للأنظمة التالية حلاً وحيداً ثم استخدم قاعدة كرامر لحل كل منها :

$$\begin{aligned} 3kX_1 - 2X_2 &= 4 \\ 6X_1 + kX_2 &= 1 \end{aligned} \quad ، \quad \begin{aligned} 6kX_1 + 4X_2 &= 5 \\ 9X_1 + 2kX_2 &= -2 \end{aligned} \; .$$

الاسبوع الثالث

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم المتجهات وتحليل المتجهات هو فهم كيفية تمثيل الكميات التي لها مقدار واتجاه والتعامل معها رياضيا بشكل دقيق خاصة في المجالات التي تعتمد على الفيزياء والرياضيات التطبيقية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المتجهات تحليل المتجهات الكميات المتجهة والقياسية جبر المتجهات

4. فضاء المتجهات Vector Spaces

ترميز : سوف نرمز للفضاء الاقليدي من النوع n بالرمز R^n حيث $n \in Z_+$ ويعرف بالشكل التالي :

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in R, \quad 1 \le i \le n\}$$

تعريف : المتجه x في R^n هو مصفوفة ذات سعة $(n \times 1)$ أو $(1 \times n)$ ويكتب بالشكل التالي :

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أو $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$. تسمى x_i بمركبات المتجه x .

تساوي المتجهات : اذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ متجهين في R^n فان $x = y$ اذا وفقط اذا كان $x_i = y_i$ لكل $1 \le i \le n$.

مثال : جد قيمة a و b الحقيقيتين التي تجعل المتجهين $x = (2, a-3b)$ و $y = (a+3b, 4)$ متساويان ؟

الحل : نفرض أن $x = y$ عليه $(2, a-3b) = (a+3b, 4)$ لذلك نحصل على ان

$$a + 3b = 2$$
$$a - 3b = 4$$

سنجد قيمتي a و b بطريقة قاعدة كرامر و كالآتي :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-6} = 3 \quad ، \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

طول المتجه : اذا كان x متجه في R^n فان طول (معيار norm) x و الذي يرمز له بالرمز $\|x\|$ يعرف على النحو الآتي $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

مثال : اذا كان $x = (2,-3,0,4)$ جد $\|x\|$ ؟

الحل: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+9+0+16} = \sqrt{29}$

تعريف: اذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ متجهين في R^n و كان $k \in R$ فأننا نُعَرف

(1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

(2) $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$.

(3) $0 = (0,0,\ldots,0)$ (يسمى المتجه الصفري)

(4) $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

(5) $x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$.

ملاحظة : اذا كان x متجه في R^n فان x متجه صفري $\leftrightarrow$ $\|x\| = 0$.

مبرهنة : اذا كان $x, y, z \in R^n$ و لتكن $\alpha, \beta \in R$ فان :

(1) $x + y = y + x$.

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(3) $x + 0 = 0 + x = x$.

(4) $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(8) $1.x = x$.

البرهان : سنبرهن (1) و (7) و تترك البقية كـ (واجب) .

(1) نفرض ان $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ حيث $x_i,y_i\in R$ لكل $1\le i\le n$ و لذلك $x_i+y_i=y_i+x_i$ لكل $1\le i\le n$ و بالتالي يكون لدينا

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)=y+x$$

(7) نفرض ان $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و لتكن $\alpha,\beta\in R$ ، عليه

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x)&=\alpha(\beta(x_1,x_2,\dots,x_n))=\alpha(\beta x_1,\beta x_2,\dots,\beta x_n)=(\alpha\beta x_1,\alpha\beta x_2,\dots,\alpha\beta x_n)\\&=\alpha\beta(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\alpha\beta)x\end{aligned}$$

الجداء الداخلي : اذا كان $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ متجهين في R^n فان الجداء الداخلي الاقليدي (Euclidean inner product) للمتجهين x و y والذي يرمز له بالرمز $x\cdot y$ يُعَرف بالشكل :

$x\cdot y=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\dots+x_n.y_n$.

ملاحظة : الجداء الداخلي لمتجهين يكون كمية عددية و ليس متجهاً ، بينما جمع متجهين يكون متجه .

مثال : اذا كان $x=(1,5,-3,2,-1)$ $y=(5,0,-2,1,1)$ جد $x\cdot y$ ؟

الحل :

$$\begin{aligned}x\cdot y&=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3+x_4\cdot y_4+x_5\cdot y_5\\&=5+0+6+2+(-1)=12\end{aligned}$$

مبرهنة : اذا كان $x,y,z\in R^n$ و لتكن $\alpha\in R$ فان :

(1) $x\cdot y=y\cdot x$

(2) $\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y$

(3) $x\cdot 0=0\cdot x=0$

(4) $x=0 \leftrightarrow x\cdot x=0$

(5) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$.

البرهان : سنبرهن (2) و (4) و نترك البقية كـ (واجب) .

(2) نفرض ان $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ حيث $x_i,y_i\in R$ لكل $1\le i\le n$ ، عليه

$$\alpha(x\cdot y)=\alpha(x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\ldots+x_n.y_n)=\alpha(x_1\cdot y_1)+\alpha(x_2\cdot y_2)+\ldots+\alpha(x_n.y_n)$$
$$=(\alpha x_1)\cdot y_1+(\alpha x_2)\cdot y_2+\ldots+(\alpha x_n).y_n$$
$$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$
$$=(\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n))\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$
$$=(\alpha x)\cdot y$$

(4) نفرض ان $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ، لذلك

$$x\cdot x=0 \ \leftrightarrow\ x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2+\ldots+x_n\cdot x_n=0$$
$$\leftrightarrow\ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}=0$$
$$\leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=0$$
$$\leftrightarrow\ x_i^{\,2}=0 \qquad 1\le i\le n \ \text{لكل}$$
$$\leftrightarrow\ x_i=0 \qquad 1\le i\le n \ \text{لكل}$$
$$\leftrightarrow\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)=(0,0,\ldots,0)$$
$$\leftrightarrow\ x=0$$

<u>تعريف</u> : يقال لمجموعة غير خالية V مع عمليتين $\oplus$ و $\odot$ بأنها <u>فضاء متجهات</u> على الحقل F اذا تحققت الشروط التالية :

<u>أولاً</u> : بالنسبة للعملية $\oplus$

(1) لكل $x, y \in V$ فان $x \oplus y \in V$ (أي ان $\oplus$ عملية مغلقة)

(2) لكل $x, y, z \in V$ فان $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (أي ان $\oplus$ عملية تجميعية)

(3) يوجد عنصر وحيد $0 \in V$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث ان $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$ لكل $x \in V$

(4) لكل $x \in V$ يوجد عنصر $-x \in V$ (يسمى النظير الجمعي لـ x) بحيث ان $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = 0$

(5) لكل $x, y \in V$ فان $x \oplus y = y \oplus x$ (أي ان $\oplus$ عملية أبدالية)

<u>ثانياً</u> : بالنسبة للعملية $\odot$

(6) لكل $x \in V$ و لكل $k \in F$ فان $x \odot k \in V$

(7) لكل $x, y \in V$ و لكل $k \in F$ فان $\odot x(x \oplus y) = k \odot y) \oplus (k \odot (k\ )$

(8) لكل $x \in V$ و لكل $k_1, k_2 \in F$ فان $x(k_1 + k_2) \odot x = (k_1 \odot)\, x(k_2 \oplus \odot)$

(9) لكل $x \in V$ و لكل $k_1, k_2 \in F$ فان $x(k_1 \cdot k_2) \odot = k_1 \odot x(k_2 \odot)$

(10) لكل $x \in V$ فان $x \odot 1 = x$ حيث 1 يمثل العنصر المحايد للعملية $\odot$.

<u>ملاحظات</u> :

(1) نرمز لعمليتي الجمع و الضرب على فضاء المتجهات بالرمز $\oplus$ و $\odot$ لغرض تمييزها عن عمليتي (+ و ·) الجمع و الضرب الاعتيادي .

(2) عناصر المجموعة V تسمى متجهات .

<u>مثال</u> : لتكن $F = R$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و $V = R^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\}$ و لتكن $\oplus$ ، $\odot$

عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V = R^2$ و $k \in F = R$

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad ، \quad x \odot k = (kx_1, kx_2)$$

بيَن فيما اذا كان $(V = R^2, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل R أم لا ؟

الحل : أولاً : بالنسبة للعملية $\oplus$

(1) نفرض $x, y \in R^2$ اذن $x = (x_1, x_2)$ ، $y = (y_1, y_2)$ حيث $x_i, y_i \in R$ لكل $i = 1,2$. بما ان $x_i, y_i \in R$ لكل $i = 1,2$ اذن $x_1 + y_1 \in R$ و $x_2 + y_2 \in R$ و لذلك يكون لدينا

$$x \oplus y = (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$$

(2) نفرض ان $x, y, z \in R^2$ اذن $x = (x_1, x_2)$ ، $y = (y_1, y_2)$ و $z = (z_1, z_2)$ حيث $x_i, y_i, z_i \in R$ لكل $i = 1,2$. عليه

$$\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= (x_1, x_2) \oplus [(y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)] \\
&= (x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \oplus (z_1, z_2) \\
&= (x \oplus y) \oplus z
\end{aligned}$$

(3) نفرض انه يوجد $a = (a_1, a_2) \in R^2$ بحيث لكل $x = (x_1, x_2) \in R^2$ يكون $x \oplus a = a \oplus x = x$

عليه $(x_1, x_2) \oplus (a_1, a_2) = (x_1, x_2) \Leftarrow (x_1 + a_1, x_2 + a_2) = (x_1, x_2)$

$\Leftarrow x_1 + a_1 = x_1$ و $x_2 + a_2 = x_2 \Leftarrow a_1 = 0$ و $a_2 = 0$. لذلك $a = (0,0) \in R^2$

بحيث ان

$$x \oplus a = (x_1, x_2) \oplus (0,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = x$$

$$a \oplus x = (0,0) \oplus (x_1, x_2) = (0 + x_1, 0 + x_2) = (x_1, x_2) = x$$

اذن $a = (0,0) \in R^2$ يمثل المحايد الجمعي للعملية $\oplus$.

(4) لكل $x = (x_1, x_2) \in R^2$ نفرض يوجد $b = (b_1, b_2) \in R^2$ بحيث ان $x \oplus b = b \oplus x = 0$.

عليه $(x_1, x_2) \oplus (b_1, b_2) = (0,0) \Leftarrow (x_1 + b_1, x_2 + b_2) = (0,0)$

$\Leftarrow x_1 + b_1 = 0$ و $x_2 + b_2 = 0 \Leftarrow b_1 = -x_1$ و $b_2 = -x_2$.

لذلك يوجد $b = (-x_1, -x_2) = -x \in R^2$ بحيث ان

$$x \oplus b = x \oplus (-x) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0,0) = 0$$

$$b \oplus x = (-x) \oplus x = (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2) = (0,0) = 0$$

و بالتالي $-x=(-x_1,-x_2)\in R^2$ هو النظير الجمعي للعنصر $x=(x_1,x_2)\in R^2$.

(5) نفرض ان $x,y\in R^2$ اذن $x=(x_1,x_2)$ ، $y=(y_1,y_2)$ حيث $x_i,y_i\in R$ لكل $i=1,2$.
عليه

$$x\oplus y=(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$=(y_1+x_1,y_2+x_2)=(y_1,y_2)\oplus(x_1,x_2)=y\oplus x$$

<u>ثانياً</u> : بالنسبة للعملية $\odot$

(6) لكل $x\in R^2$ اذن $x=(x_1,x_2)$ و لكل $k\in F=R$. بما ان $x_i\in R$ لكل $i=1,2$ اذن $kx_1\in R$ ، $kx_2\in R$ و بالتالي نحصل على ان $x\odot k=(kx_1,kx_2)\in R^2$.

(7) نفرض ان $x,y\in R^2$ اذن $x=(x_1,x_2)$ ، $y=(y_1,y_2)$ وليكن $k\in F=R$ ، لذلك يكون

$$\odot k(x\oplus y)=\odot k(x_1+y_1,x_2+y_2)\ =(kx_1+ky_1,kx_2+ky_2)$$
$$=(kx_1,kx_2)\oplus(ky_1+ky_2)$$
$$=x\odot y)\oplus(k\odot (k\ )$$

(8) و (9) تترك واجب .

(10) لكل $x\in R^2$ اذن $x=(x_1,x_2)$ فان $x\odot 1\ \odot=1(x_1,x_2)=(1\cdot x_1,1\cdot x_2)=(x_1,x_2)=x$

و بالتالي فان $(V=R^2,\oplus,\odot)$ فضاء متجهات على الحقل $F=R$.

<u>مثال</u> : لتكن $F=R$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و $V=R^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_i\in R,1\le i\le n\}$ حيث $n\in Z_+$ ولتكن $\oplus$،$\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل: لكل $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ و $k\in F=R$ $x\oplus y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ ، $x\odot k=(kx_1,kx_2,\ldots,kx_n)$
بيَن فيما اذا كان $(R^n,\oplus,\odot)$ فضاء متجهات على الحقل R أم لا ؟

<u>مثال</u> : لتكن $F=R$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و $V=R^2=\{(x_1,x_2)|x_1,x_2\in R\}$ و لتكن $\oplus$ ، $\odot$

عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in V=R^2$ و $k\in F=R$

$$x \odot k = (kx_1, 3kx_2) \quad ، \quad x \oplus y = (x_1 + y_1, y_2)$$

بيَن فيما اذا كان $(V = R^2, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل R أم لا ؟

الحل : بما ان $x = (1,2), y = (2,3) \in R^2$ لكن لدينا $x \oplus y = (1 + 2,3) = (3,3)$ و $y \oplus x = (2+1,2) = (3,2)$ أي ان $x \oplus y \neq y \oplus x$.

أو سبب آخر بما ان $x = (1,2) \in R^2$ لكن لدينا $1 \odot x = (1 \cdot 1, 3 \cdot 1 \cdot 2) = (1,6) \neq x$

و بالتالي $(V = R^2, \oplus, \odot)$ لا يمثل فضاء متجهات على الحقل R .

مثال: لتكن $F = C$ تمثل مجموعة الأعداد المعقدة و $V = R^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\}$ و لتكن $\oplus$ ، $\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V = R^2$ و $k \in F = C$

$$x \odot k = (kx_1, kx_2) \quad ، \quad x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

هل ان $(V = R^2, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل C أم لا ؟

ملاحظة : تعَرف مجموعة الأعداد المعقدة C كالآتي : $C = \{z | z = x + iy ، x, y \in R, \ i = \sqrt{-1}\}$.

مثال : لتكن R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و لتكن $V = M_2(R) = \{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} | a_1, a_2, a_3, a_4 \in R\}$

ولتكن $\oplus$ ، $\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ و لكل $k \in R$ لدينا

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \quad ، \quad k \odot A = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}.$$

برهن ان $(M_2(R), \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل R .

مثال : لتكن F حقل معين و لتكن $V = M_{mn}(F) = \{A | m \times n$ مصفوفة سعة $A\}$ ولتكن $\oplus$ ، $\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{mn}(F)$ و لكل $k \in F$

$A \oplus B = \lfloor a_{ij} + b_{ij} \rfloor$ ، $\odot k\,A = \lfloor ka_{ij} \rfloor$. برهن ان $(M_{mn}(F),\oplus,\odot)$ فضاء متجهات على الحقل F و يسمى فضاء المصفوفات سعة $m \times n$.

مثال : لتكن R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و لتكن $V = M_2(R)$ ولتكن $\oplus$ ، $\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل الآتي : لكل $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ و لكل $k \in R$

$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$ ، $\odot k\,A = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 \\ 0 & ka_4 \end{bmatrix}$.

هل ان $(M_2(R),\oplus,\odot)$ فضاء متجهات على الحقل R أم لا ؟

الحل : بما ان $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ لكن $\odot 1\,A = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 0 \\ 0 & 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \neq A$.

و بالتالي $(M_2(R),\oplus,\odot)$ لا تمثل فضاء متجهات على الحقل R .

مثال : لتكن F حقل معين و لتكن $V = P_n(F) = \{a_\circ + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in F, 1 \le i \le n\}$ حيث $n \in Z_+$ ولتكن $\oplus$ ، $\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $A, B \in P_n(F)$ و لكل $k \in F$ أي ان $A = a_\circ + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ ، $B = b_\circ + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$

$$A \oplus B = (a_\circ + b_\circ) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\odot k\,A = (ka_\circ) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + \ldots + (ka_n)x^n$$

برهن ان $(P_n(F),\oplus,\odot)$ فضاء متجهات على الحقل F و يسمى بفضاء متعددات الحدود من الدرجة اقل أو يساوي n .

مثال : لتكن F حقل معين و ليكن $V = F^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in F, 1 \le i \le n\}$ حيث $n \in Z_+$ ولتكن $\oplus$ ،$\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل : لكل $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F^n$ و $k \in F$

$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ ، $x \odot k = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$

برهن ان $(F^n, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل F .

كحالة خاصة للمثال أعلاه نقدم المثال التالي :

<u>**مثال**</u> **:** لتكن $F = C$ مجموعة الأعداد المعقدة و ليكن $V = C^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) | z_i \in C, 1 \le i \le n\}$

حيث $n \in Z_+$ ولتكن $\oplus$ ،$\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل :

لكل $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in C^n$ و $k \in C$

$z \oplus w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n)$ ، $z \odot k = (kz_1, kz_2, \ldots, kz_n)$

فان $(C^n, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل C .

<u>**مثال**</u> **:** لتكن $F = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية و ليكن $V = \{0\}$ ولتكن $\oplus$ ،$\odot$ عمليتين معرفتين بالشكل :

$0 + 0 = 0$ و $0 \odot k = 0$ لكل $k \in R$. فان $(\{0\}, \oplus, \odot)$ فضاء متجهات على الحقل R

و <u>يسمى</u> فضاء المتجهات الصفري .

الاسبوع الرابع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم وحده المتجهات المتعامدة ومقياس المتجهة هو تطوير فهم تراكيب وتحليل المتجهات بدقة اكبر خاصة في الفضاء ثنائي او ثلاثي الابعاد

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

وحده المتجهات المتعامد مقياس المتجهة الضرب القياسي

المتجهات Vectors

2 - 1 الكميات القياسية والكميات المتجهة Scalars and vectors

الكميات الفيزيائية نوعان:

أ- الكميات القياسية: هي كميات فيزيائية غير متجهة يتم تعيينها تماما إذا عرف مقدارها فقط

ومن أمثلة الكميات القياسية: الكتلة، الزمن، الطول، درجة الحرارة والطاقة

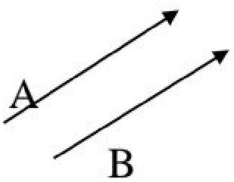
ب- الكميات المتجهة: هي كميات فيزيائية متجهة يتم تعيينها تماما بمعرفة مقدارها واتجاهها.

يمكن تمييز الكمية المتجهة عن الكمية القياسية وذلك بكتابة المتجه بخط عريض **A** كما هو مستخدم في الكتب أو بوضع إشارة سهم أعلى الرمز A كما هو الحال في الكتابة اليدوية A . أما الكمية القياسية أو ما يعرف بقيمة المتجه A مثلا فيعبر عنه بالرمز |A|. ومن الأمثلة على الكميات المتجهة الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وكمية الحركة. وتستخدم عادة الطرق الهندسية في تمثيل الكمية المتجهة حيث يمثل المتجه بيانية بسهم يتناسب طوله طرديا مع مقدار المتجه شكل (2-1) سهم يمثل المتجه

شكل (2-1).

خواص المتجهات:

• تساوي المتجهات: إن المتجهين B، A متساويان إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه (ونفس الوحدة إن وجدت) ،

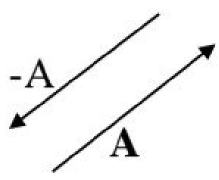


أي أن B =A

إذا كان مقدار A يساوي مقدار B وكان السهم الممثل للمتجه A يوازي السهم الممثل للمتجه B

شكل (2-3)تساوى المتجهات

سالب المتجه:



إذا أعطينا المتجه **A** فإن A- هو متجه مساو له في المقدار ويعاكسه في الاتجاه شكل (2-3)

شكل (2-3) سالب المتجه

. جمع المتجهات:

عند جمع المتجهات يجب أن تكون هذه المتجهات من نفس النوع فلا يمكن مثلا أن نجمع متجه قوة إلى متجه سرعة لاختلافهما في الأبعاد. وذلك ينطبق أيضا عند جمع الكميات القياسية.

إيجاد محصلة مجموعة من المتجهات:

1- إذا كانت جميعها تعمل على خط واحد فإنها تجمع جبرية بإشاراتها وذلك بعد اختيار اتجاها معينا يكون موجبة.

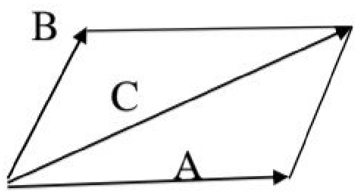
وإذا تساوى مقدار متجهين وتضادا اتجاها كان محصلتهما تساوي صفر.

2- إذا لم يكن خط تأثير المتجهات واحدا فإننا نوجد محصلتها بإحدى طريقتين:

أ. طريقة متوازي الأضلاع:

حاصل جمع المتجهين A و B هو متجه C، ويسمى عادة بالمحصلة (Resultant). ولإجراء عملية الجمع نقوم برسم أحد المتجهين أولا وليكن A بمقياس رسم مناسب، ثم من بداية المتجه A نرسم المتجه B بنفس مقياس الرسم ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران هما المتجهان A وB.

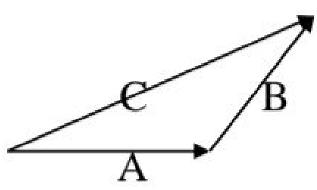
كما هو موضح في الشكل



(4-2) محصلة متجهين

ب- طريقة المثلث:

لإجراء عملية الجمع بطريقة المثلث نقوم برسم أحد المتجهين أولا وليكن A بمقياس رسم مناسب، ثم من رأس المتجه A ننقل المتجه B فتكون المحصلة C هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه و وينتهي عند رأس المتجه B كما في الشكل (5-2).



شكل (5-2) محصلة متجهين

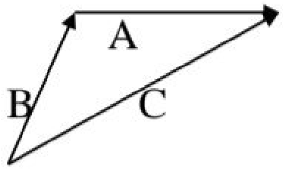
A + B بطريقة المثلث

ويمكن التعبير رياضية عن عملية الجمع في كلتي الطريقتين بالمعادلة (2-1).

$$C = A + B \qquad (2\text{-}1)$$

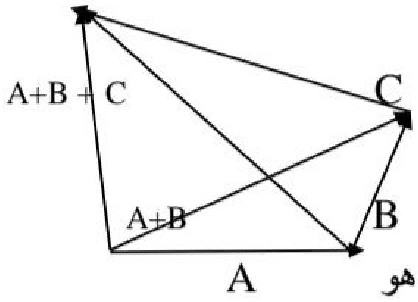
لنفرض أننا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه B أولا ثم جمعنا

إليه المتجه A أي قمنا بعملية الجمع A + B يتضح من الشكل (6-2) أننا نحصل على نفس المتجه C وبذلك نستطيع أن نكتب :



شكل (6-2) محصلة متجهين

$$A + B = B + A \qquad (2-2)$$



بطريقة المثلث

وتسمي هذه النتيجة بقانون التبادل للجمع .

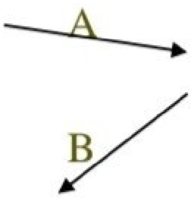
ويمكن تطبيق طريقة المثلث لجمع اكثر من متجهين, فمثلا المتجهات الثلاث Aو B و C يمكن جمعها كما هو مبين في الشكل (7-2). ويمكن التعبير عن هذه النتيجة رياضية بالمعادلة

شكل (7-2) محصلة ثلاث متجهات بطريقة المثلث

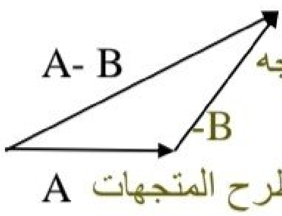
$$(A+B) + C = A +(B + C)$$

وتسمى هذه المعادلة بقانون الترافق للجمع.

. طرح المتجهات:



إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلا A - B هو متجه جديد C ولتحديد المتجه C نقوم برسم المتجه A أولا ومن رأس هذا المتجه نرسم سهمة موازية ومعاكسة في الاتجاه للمتجه B.



إن هذا السهم يمثل المتجه B- ، وبذلك تكون المحصلة C هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه A وينتهي عند رأس المتجه B- شكل (9-2). تمثل هذه العملية رياضية بالمعادلة (5-2). شكل (9-2) طرح المتجهات

$$C = A- B \qquad (2-4)$$

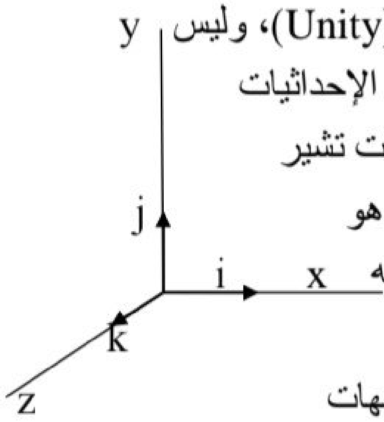
. ضرب المتجهات بكمية قياسية:

يمكن ضرب المتجه بكمية قياسية فمثلا 2A تعني متجه جديد مقداره A 2واتجاهه هو نفس اتجاه A. وبصورة عامة فإن ضرب المتجه A بالكمية القياسية ، يعطي المتجه cA و اتجاهه هو نفس اتجاه A إذا كانت الكمية القياسية c موجبة. وعكس اتجاه A إذا كانت الكمية القياسية c سالبة

من الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية الزخم الخطي (كمية التحرك الخطية) P وهو حاصل ضرب الكتلة m في متجه السرعة v ويعطي بالعلاقة (2-5)

$$P = mv \qquad (2\text{-}5)$$

2 - 2 متجهات الوحدة Unit vectors

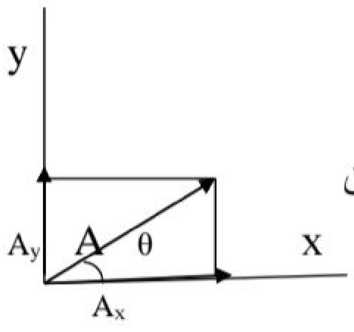


متجه الوحدة هو متجه له اتجاه معين وقيمته هي الوحدة (Unity)، وليس له وحدة قياس أو بعد يوجد ثلاث متجهات وحدة في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) هي k ,i, j حيث أن هذه المتجهات تشير إلى الاتجاه الموجب للمحاور x ,y, z على الترتيب كما هو موضح في الشكل (2-10) ، فمثلا إذا كان المتجه A يتجه باتجاه x الموجب وقيمته A و B يتجه باتجاه y الموجب وقيمته B و C باتجاه z الموجب وقيمته C فإن هذا المتجهات تكتب على الترتيب بالصورة الاتجاهية التالية :

$$A = Ai, \quad B = Bj, \quad C = Ck$$

ملاحظة : وجود الإشارة السالبة أمام أي متجه وحدة يدل الاتجاه المعاكس فمثلا i- تشير إلى الاتجاه السالب لمحور x. متجهات الوحدة i و j وk تتجه في الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة على الترتيب

3 - 2 تحليل المتجهات Analysis of vectors



يمكن تحليل أي متجه A واقع في المستوى xy إلى متجهين متعامدين ، الأول موازي لمحور x (A_x) والآخر موازي لمحور y ((A_y)) وتكون محصلتهما هي نفس المتجه A:

شكل (2-11) تحليل المتجه A إلى مركبتين متعامدتين

$$A = A_x\, i + A_y j \qquad (2\text{-}7)$$

فإذا كان المتجه A يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب للمحور x كماهو بالشكل (2-11) وأسقطنا من رأس المتجه A عمودين على المحورين x و y فإن الكميتين A_x و A_y هما مركبتا المتجه A ومن الشكل نجد أن :

$$Ax = A \cos \theta, \qquad Ay = A \sin \theta \qquad (2\text{-}8)$$

• إن المركبتين A_x و A_y, أرقام يمكن أن تكون موجبه أو سالبه (أو صفر) و تسمى عملية إيجادهما بتحليل المتجه إلى مركباته. • إن المركبتين A_x, و A_y تشكلان ضلعين من مثلث قائم الزاوية بينما يشكل A وتر هذا المثلث و بتطبيق

نظرية فيثاغورث نجد أن قيمة المتجه A تعطي كما في المعادلة (2-9) :

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \qquad (2\text{-}9)$$

$$\tan\theta = A_y / A_x \qquad (2\text{-}10)$$

وعند حلها لإيجاد قيمة θ فإنا نكتب

$$\theta = \tan^{-1} (A_y / A_x)$$

وتعتبر θ المسئولة عن تحديد إشارات المركبات A_x,

و A_y لأن الزاوية θ تحدد الربع الذي يقع فيه المتجه A. الشكل (2-12) يلخص إشارات المركبات في كل ربع.

مثال (1-2) احسب المركبتين السينية والصادية للمتجهات التالية: أ- متجه A قيمته 6 وحدات ويصنع زاوية مقدارها °240 مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل:

$$Ax = A \cos 240 = 6 * (-1/2) = -3$$

$$Ay = A \sin 240 = 6*(-0.86) = -5.2$$

حل آخر:

$$Ax = -A \cos 60 = -6 \times (1/2) = -3$$

$$Ay = -A \sin (60) = -6*0.86 = -5.2$$

ب- متجه B قيمته 5 وحدات و يصنع زاوية مقدارها 110^0 مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل:

$$Bx = B \cos 110 = -1.7$$

$$By = B \sin 110 = 4.7$$

محصلة المتجهات Resultant of vectors

تستخدم طريقة تحليل المتجهات لإيجاد محصلة مجموعة منها فإذا فرضنا مثلا ثلاثة متجهات A و B و C في مستوى واحد و تصنع الزوايا θ_1، θ_2، θ_3 مع الاتجاه السيني على الترتيب فإن مركبات هذه المتجهات في الاتجاه السيني هي:

$$Ax = A\ cos_1\theta$$

,

$$Bx = B\ cos_2\theta\ ,$$

$$Cx = C\ cos_3\theta$$

وتكون محصله هذه المركبات في الاتجاه السيني هي:

$$Rx = Ax + Bx + Cx = A\ cos_1\theta\ + B\ cos_2\theta + C\ cos\ _3\theta$$

بالمثل بالنسبة للمركبات العمودية في الاتجاه الصادي تكون محصلتها

$$Ry = Ay + By + Cy = A\ sin_1\theta,\ +B\ sin_2\theta\ + C\ sin_3\theta$$

قيمة محصلة مجموعة المتجهات تكون هي نفسها محصله المركبات السينية و الصادية و تعطي بالمعادلة

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \quad (2\text{-}12)$$

ويمكن إيجاد اتجاه المحصلة أي الزاوية و التي تصنعها مع المحور السيني من المعادلة

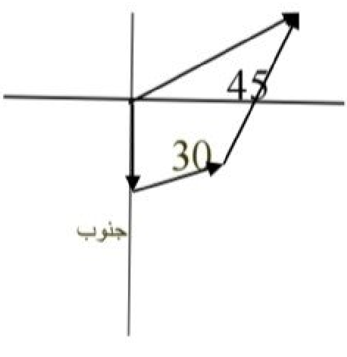
$$\theta = \tan^{-1} (R_y / R_x) \qquad (2\text{-}13)$$

ويمكن كتابة محصلة مجموعة من المتجهات بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\mathbf{R=A+B+C=(A_x+B_x+C_x)}\boldsymbol{i}\mathbf{+(A_y+B_y+C_y)}\boldsymbol{j}\mathbf{+(A_z+B_z+C_z)}\boldsymbol{k} \qquad (2\text{-}14)$$

مثال

يخرج سائح من مدينة هيت فيقطع مسافة 10 km باتجاه الجنوب ، ثم يسير مسافة 15 km باتجاه يصنع 30% شمال شرق ثم يقطع مسافة 02km باتجاه الشمال الشرقي. ما هو موضع السائح بالنسبة لمدينة هيت ؟



الحل:

إن المسافات التي يقطعها السائح هي متجهات إزاحة لكل منها مقدار و اتجاه، فالمسألة هي جمع متجهات.

khalidrokan478@gmail.com

الرسم يوضح الحالات المتعاقبة لسير السائح و يوضح موقعه الحالي من مدينة صنعاء والتي تمثل نقطة الأصل،

على تحليل الإزاحات الثلاثة في الاتجاهين ولإيجاد قيمة واتجاه المحصلة (الموضع بالنسبة لمدينة غزة) نعمل السيني والصادي ثم نحسب المحصلة مقدارا واتجاها.

$R_x = 0 + 15 \cos 30 + 20 \cos 45 = 15 * 0.866 + 20 * 0.707$

$= 27.13\ Km$

$R_y = -10 + 15 \sin 30 + 20 \sin 45 = -10 + 15 * 0.5 + 20 * 0.707$

$= 11.64\ Km$

$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = ((27.13)^2\ )^{1/2} + ((11\ .64)^2\ )^{1/2}$

$R = (736 + 135.5)^{1/2} = 29.5 Km$

$\theta = \tan^{-1} (R_y / R_x)$

$\theta = \tan^{-1} (11.64 / 27.13)$

$\theta = 23.2^0$

ملاحظة/ يمكن كتابة المحصلة بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$R = R_x\, i + R_y j = 27.13\, i + 11.64 j$

مثال (2-2)

Two vectors are given by A = 3i-2j and B = -i - 43 . Calculate (a) A+B, (b) A-B , (c). |A + B|, (d) |A - B|, and (e) the direction of A+B and |Ā– B|.

الحل

(a) A + B = (3i - 2j) + (-i - 4j) = 2i - 6j

(b) A-B = (3i - 2j) - (-i - 4j) = 4i + 2j

(c) $|A + B| = [2^2 + (-6)^2]^{1/2} = 6.32$

(d) $|A - B| = [4^2 + 2^2\ ]^{1/2} = 4.47$

(e) For A + B , $\theta = \tan^{-1}(-6/2) = -71.60 = 288^0$

For $|\bar{A} - B|$,$\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^0$

ضرب المتجهات Product of vectors

يوجد نوعين من الضرب للمتجهات النوع الأول يسمى الضرب القياسي لأن حاصل ضرب متجهين يعطي كمية قياسية مثل حاصل ضرب متجه القوة في متجهة الإزاحة يكون الناتج الشغل وهو كمية قياسية،

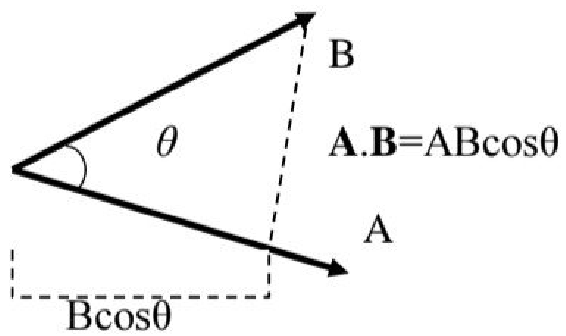
والنوع الثاني هو الضرب الاتجاهي وذلك لان حاصل ضرب متجهين ينتج عنه متجه ثالث يكون اتجاهه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين الآخرين مثل متجه سرعة جسم مشحون في متجه المجال المغناطيسي ينتج عنه متجه قوة مغناطيسية

الضرب القياسي

The scalar product

يعرف الضرب القياسي scalar product بالضرب النقطي dot product وتكون نتيجة الضرب القياسي لمتجهين كمية قياسية. ويعرف الضرب القياسي لمتجهين بحاصل ضرب مقدار المتجه الأول في مقدار المتجه الثاني في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = |A|B| \cos\theta$



يمكن إيجاد قيمة الضرب القياسي لمتجهين باستخدام مركبات كل متجه كما يلي:

$i.i = j.j = k.k = 1$, $i.j = i.\ k = j.k = 0$

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = (A_x\, i + A_y j + A_z k)\ .\ (B_x\, i + B_y\, j + B_z k)$

$\mathbf{A.B} = (A_x i.B_x i + A_x i.B_y\, j + A_x i.B_z k + A_y j.B_x i + A_y j B_y j + A_y j.B_z k$

$+ A_z k.B_x i + A_z k.B_y j + A_y k.B_z k)$

Therefore

$\therefore\ \mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

The angle between the two vectors is

$\cos\theta = \mathbf{A.B}/|A||B| = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\ /|A||\ B|$

قواعد الضرب العددي في القائمة التالية:

$$(1)\ \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$(2)\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$\begin{aligned}(3)\ m(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= (m\vec{A})\cdot\vec{B}\\ &= \vec{A}\cdot(m\vec{B})\\ &= (\vec{A}\cdot\vec{B})\,m\end{aligned}$$

مثال

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{x} + A_y\hat{y})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y})\\ &= A_x\hat{x}\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y}) + A_y\hat{y}\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y})\\ &= A_xB_x + A_yB_y\end{aligned}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$$

مثال. ضع في اعتبارك متجهين $\vec{A} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$ ، و $\vec{B} = 6\hat{x} - 3\hat{y}$. الآن ما هي الزاوية بين هذين المتجهين؟

من تعريف المنتجات العددية لدينا

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$
$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 2\times6 - 3\times2 = 6$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2.83$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 6.71$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{6}{2.83 \times 6.71} = 0.316$$

$$\therefore \theta = 71^\circ 36'$$

الاسبوع الخامس

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية هو فهم العلاقات بين الزوايا والاضلاع في المثلثات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

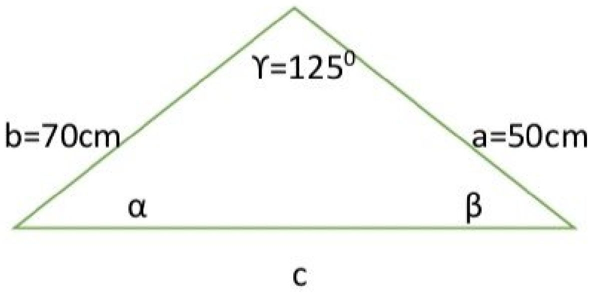
عنوان المحاضرة:

الدالة الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية

العلاقات الهندسية للمثلث غير قائم الزاوية:

1- قاعدة جيب تمام (حساب طول ضلع بمعلومية الضلعين الأخرين والزاوية التي ينهما):-

مثال1 / جد طول الضلع c أذا علمت أن :



B= 70 سم

A = 50 سم

الزاويه كاما ϒ= 125^0

يمكن من خلال المعطيات وأستخدام قاعدة جتا cos أستخراج طول الوتر c = ؟ بمعلومية ضلعين وزاويتهما :-

1- تطبيق القانون الضلع المجهول ^{2} = الضلع المعلوم الاول ^{2} + الضلع المعلوم الثاني^2 – 2 × الضلع الاول ×الضلع الثاني ×(جتا الزاوية المحصورة بينهما)

$C^2 = a^2+b^2- 2ab(\cos ϒ)$

التطبيق يكون بالحاسبة العلمية مباشرة

2- بعد تحويل وكتابة القيم على القانون

$C^2 = 50^2 + 70^2 - \underline{2 \times 50 \times 70 (\cos 125)}$

نبداء من يمين المعادله

أي كتابة 125 ثم ننقر cos ثم× 70 ×50×2 ثم يطرح من 7400 الذي هو حاصل ضرب(50×50 +70×70)

يكون الناتج – 11415.03505 (يكون الناتج سالب ...أن أجراء العملية بخطواتها على الورق يتيح المجال لظهور اشارتي السالب للطرفين في المعادلة ومن المعلوم ان السالب مع السالب يقلب العملية الى الموجب،وهنا وباستخدام الحاسبة ننقر على الرمز+/- للتخلص من السالب) فيكون الناتج :-

$C^2 = 11415.03505$

$C = \sqrt{11415.03505} = 106.841$ cm

قمنا بجذر الرقم للتخلص من تربيع الوتر c= فيكون الناتج 106.841 سم

خطوات مهمه عند أستخدام الحاسبة(سواء حاسبة الهاتف أو الحاسبة العلمية):

لأستخراج أي عملية يكتب الرقم ثم العملية المراد تطبيقها :

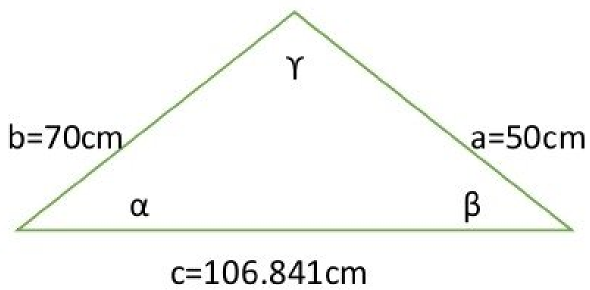
مثلا – (cos 125) نكتب الرقم 125 ثم ننقر على مختصر cos في الحاسبة فيكون الناتج ‎-0.57357‎

- ومربع 50 مثلا أما الرقم في نفسه 50×50 أو نكتب 50 ثم ننقر x^2 فيكون الناتج 2500 .

- وكذلك عند أستخراج الجذر نكتب الرقم ثم ننقر على رمز الجذر المطلوب مرفوع للقوة 2 أو 3 أو رقم أخر $\sqrt{\ }$ أو $\sqrt[3]{\ }$ ...الخ

يمكن تطبيق قاعدة جتا أيضا في اسخراج قيمة الزاوية المحصورة بين الضلعين أذا كان هي مجهوله...

مثل2 / على فرض أن الزاويه كاما ϒ هي مجهوله في المثال السابق وأن طول الضلع a= 50 سم و الضلع b= 70 سم والوتر c= 106.841 سم (حسب ما أستخرج بالمثال الاول)



يمكن تطبيق المعادلة مع تغيير المطلوب وهو استخراج الزاويه ϒ: يكون التطبيق على الحاسبة وبالخطوات التالية:

1- كتابة القانون الذي تغير بحسب المطلوب $\cos\Upsilon = a^2+b^2-c^2/2xaxb$

حيث أن المطلوب هو اسخرج الزاويه كاما(ϒ)=الضلع aتربيع يجمع مع الضلعb تربيع – الضلع cتربيع ويقسم المجموع على مضروب 2xaxb

$\text{Cos } \Upsilon = 50^2+70^2\_c^2/2x50x70$

$\cos\Upsilon = 7400^{(50x50+70x70)}\_11415.99^{(106.841x106.841)}/7000^{(2x50x70)}$

هذه الارقام الصغيره هي للتدليل على الرقم المستخرج ومن اجل الفهم فقط.أذ يمكن كتابة الخطوة الاولى مباشره على الحاسبة واستخراج الرقم ،اشارة السالب مهمه كونها جائت من طرح الكبيرمن الصغير:

$\cos\Upsilon = -4014.99/7000$

$= -0.57357$

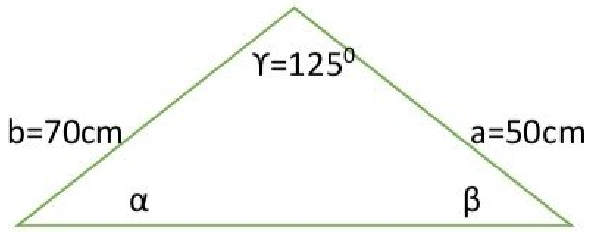
في هذه الحاله نحول الحاسبة عن طريق shift هذا في الحاسبات العلمية أو 2^{nd} في حاسبة الهاتف من أجل الوصول الى مختصر $\cos^{-1}$ وننقر عليه للحصول على الناتج :-

وهو 124.99 وبالتقريب = 125^0 أي ان الزاوية $\gamma=125^0$ وهي كما كانت في المثال الاول.

2- قاعدة الجيب (وتستخدم لحساب زاويه بمعلومية ضلعين وزاوية مقابله لاحدهما):حيث يمكن أن تكون علاقة جا sin بين الزاويه والضلع المقابل لها:

$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ أي الضلع a مقسوم على جا الزاويه الفا α لانها مقابله له ويساوي الضلع b مقسوم على جا الزاويه بيتا β ويساوي الوتر c مقسوم على جا الزاويه كاماγ.

في هذه الحالة يكون لدينا زاويه مجهولة وضلعين معلومين وزاويه معلومه تكون مقابله لاحد الضلعين.



مثل 3/في المثلث لدينا زاوية ألفا α مجهوله ولدينا معلومية الضلع المقابل لها $a=50$ cm والضلع $c=106.841$cm والزاويه كاما$\gamma=125^0$

ستكون العلاقة بحسب المعطيات الموجودة :

$a/\sin\alpha = c/\sin\gamma$

$50/\sin\alpha = 106.841/\sin 125^0$

هنا يكون التاكيد على المعطيات المعلومه للمثلث حيث إن المجهول الوحيد في هذه العلاقة هو الزاوية ألفاα وبحسب قاعدة حاصل ضرب الطرفين x تكون عملية التبادل للاطراف :

$\sin\alpha = 50 \times \sin 125^0/106.841$

$\sin\alpha = 0.383350982$

وبنفس الخطوات بالحاسبة نكتب 125 ثم sin ثم نضرب ×50 ونقسم على 106.841

$0.383350982\ \sin^{-1}$

هنا خطوه مهمه وهي تكتب الناتج ثم ننقر sin^{-1} والذي يمكن أيجادة بعد تحويل الحاسبه (راجع الملاحظات السابقة الخاصة بتحويل الحاسبة) من أجل تحديد الزاويه

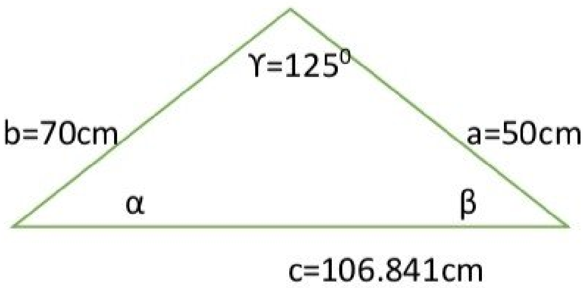
$= 22^0.541$

$0.541 \times 60 = 32'.46$

$0.46 \times 60 = 27''.6$

بعد أيجاد قيمة الزاوية ألفا α بحسب الخطوات اعلاه يمكننا وكما درسنا أيجاد الدقائق والثواني للزاويه بعد معرفة أن الزاويه من النظام الستيني. الزاويه $\alpha = 22^0\ 32'\ 27''$

3- المساحة :- في الهندسة الرياضية تمثل مساحة المثلث بقانون ½ ×القاعدة×الارتفاع ، والقاعدة هي أحد الاضلاع ، والارتفاع هو العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة أو على أمتدادها.وفي حال توفرت المعطيات كلها يمكن أستخراج المساحة.



عند النظر الى الشكل نلاحظ انه توجد اطوال الاضلاع لكن نحتاج الارتفاع

- بمعلومية أطوال الاضلاع : نحتاج هنا أيجاد نصف محيط المثلث والذي يستخرج عن طريق مجموع (أطوال اضلاعة الثلاثة) مقسومة على 2 :

$h=a+b+c\ /2$

$h= 50+70+106.841\ /2 =113.4205\ cm$

113.4205cm هذا يمثل نصف محيط المثلث

ثم تطبق المعادلة التالية لحساب مساحة المثلث وهي :

$$A= \sqrt{h(h-a)(h-b)(h-c)}$$

الجذر يشمل كل الاطراف وبما أن $h = 113.4205$

$$A= \sqrt{113.4205(113.4205-50)(113.4205-70)(113.4205-106.841)}$$

$A=1433.522cm^2$

مساحة المثلث .والمساحة تكون مربعة .

- يمكن أستخراج المساحة بمعلومية ضلعين والزاوية بينهما:

وهنا بحسب معطيات المثلث السابق أذا أعتبرنا أن قيمة الضلع c غير موجوده ولدينا فقط الضلع a و b والزاوية كاماϒ معلومين فيكون التطبيق كالاتي :

$A=1/2x\ a\ x\ b\ x\ \sin ϒ$

(ملاحظة عند استخدام الحاسبة يمكن كتابة 0.5 بدل ½ فهما نفس القيمة وهذا لتسهيل الكتابة على الحاسبة لاتمام كتابة الارقام)

$A=1/2\ x50\ x70\ x\ \sin 125^0 = 1433.516\ cm^2$

وهي مقاربه للمساحة التي استخرجت بالخطوات التي قبلها(بمعلومية أطوال الاضلاع)

أرجوا قراءة هذا الملخص مع الملزمه لفهم العلاقات الهندسية للمثلثات غير القائمة الزاويه ،أذ تمثل كل الارقام التي تمثلت في الامثلة من أجل فهم كيفية تطبيق العلاقات (هي للشرح فقط).

الاسبوع السادس

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم الدالة الاسية ودوال القطع الزائد هو لفهم الكثير من الظواهر الطبيعية والرياضية التي تتغير بسرعة او بشكل غير خطي

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

الدالة الاسية دوال القطع الزائد و تطبيقاتها

الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية ذات الأساس a تكتب بالصيغة

$f(x) = \mathrm{a}^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر ($\mathrm{a} > 0$).

المجال (أو المنطلق) للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$f(x) = 4^x \quad , \quad f(x) = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

بعض خصائص الدالة الاسية:

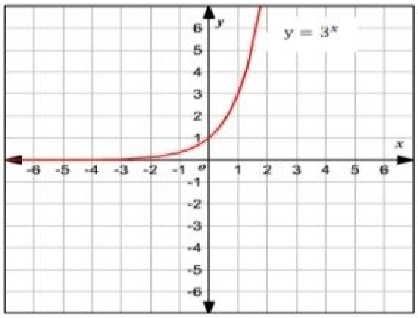
- $\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$
- $\mathrm{a}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \left(\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\right)^{\mathrm{m}} = \left(\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{m}}$
- أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فان $\mathrm{a}^x > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $\mathrm{a}^{x+\mathrm{y}} = \mathrm{a}^x \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$
- $\mathrm{a}^{x-\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}^x}{\mathrm{a}^{\mathrm{y}}}$
- $\mathrm{a}^0 = 1$
- أذا كان $\mathrm{a} > 1$ ، فان a^x دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ ، فان a^x دالة متناقصة.
- a^x دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $\mathrm{a} = 1$ ، فان $\mathrm{a}^x = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$f(x) = 3^x \quad , \quad \mathrm{g}(x) = 2^{-x} \quad , \quad \mathrm{h}(x) = 5^{-x} \quad , \quad \mathrm{u}(x) = 4^x$

الحل: الدالة $f(x) = 3^x$

$\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty) \quad , \quad \mathrm{R}_f = (0, \infty)$

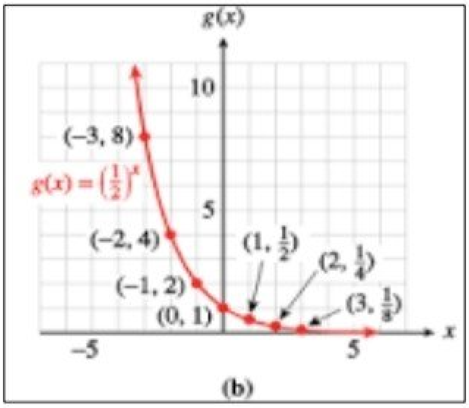


x	−4	−2	−1	0	2	4	6
$f(x)$	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty, \infty)$.

أما الدالة $g(x) = 2^{-x}$

$$D_g = (-\infty, \infty) \qquad , \qquad R_g = (0, \infty)$$



x	−6	−4	−2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty, \infty)$.

تفاضل وتكامل الدالة الاسية

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad , \quad a > 0 \, , a \neq 1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2 \cdot (6x+4)$$
$$= (48x + 32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = x^2\ 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\ 3^x(x\ \ln 3 + 2)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^{t^4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot \ln 4 \cdot (4t^3)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل:

$$y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot \ln 2 \cdot (2 + 2t)$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2\ (7^{2x+3})\, dx = \frac{1}{2}\ \frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x} dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right) dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\} dx$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)} \right\}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} - 1}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5} - 1}{\ln(4/5)}$$

$$= \frac{-2/5}{\ln(3/5)} + \frac{-1/5}{\ln(4/5)} .$$

Natural Exponential Function $\quad y = e^x \quad$ الدالة الاسية الطبيعية

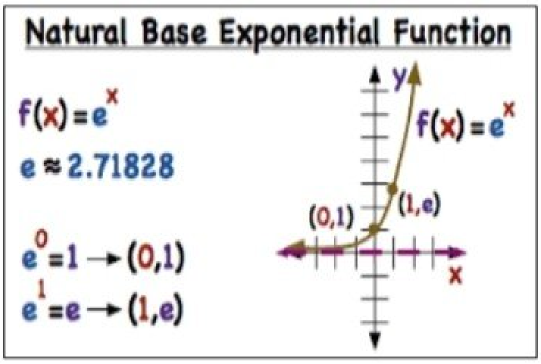
يعرف العدد e كالاتي:

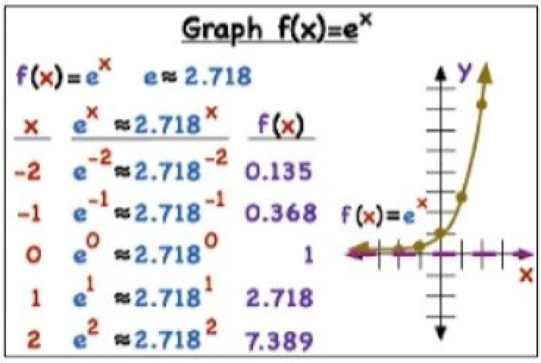
$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$e = 2.718281828459045 \ldots$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y = e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.





تفاضل الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $\quad y = e^{-x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-2x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{3x} \sin(2x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot (2\cos(2x)) + \sin(2x) \cdot (3e^{3x})$$
$$= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = -5\, e^{\sin x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\, e^{\sin x} \cdot (\cos x) = -5\cos x \cdot e^{\sin x}$$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\, e^{x^2}\, dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^x+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بـــ e^{-x} فنحصل على

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

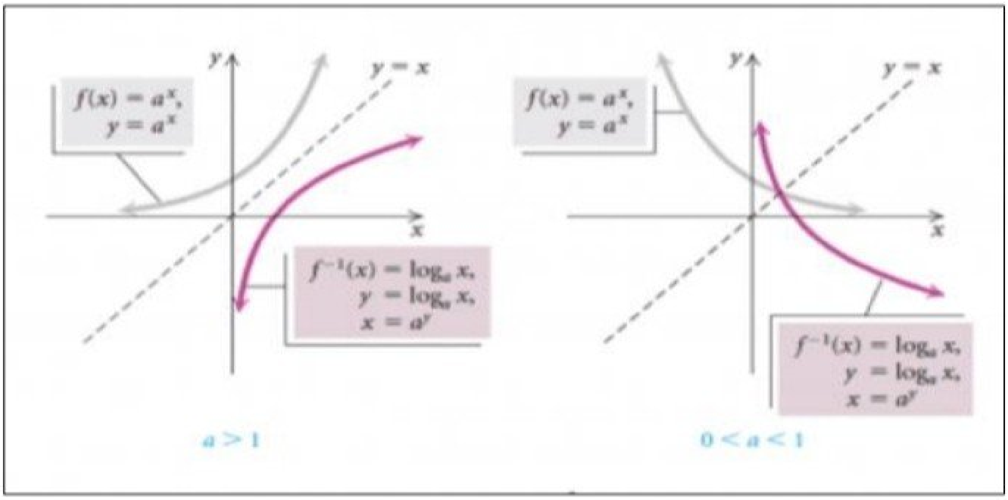
يطلق على معكوس $f(x) = a^x$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بـــ $\log_a x$. هذا يعني أنه اذا كانت

$$f(x) = a^x \ , \ a > 0 , \qquad a \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

كما يظهر التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. منطلق دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.



exponent

$$\log_a x = y \quad \text{means} \quad a^y = x$$

base

$$a > 0,\ a \neq 1, y \neq 0$$

Example:

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{means} \quad 2^3 = 8$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a > 0$ و $a \neq 1$ و x, y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3) $\log_a(1) = 0$

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

5) $\log_a(a) = 1$

6) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x) \qquad \text{where} \quad r \in \mathbb{R}$

7) $a^{\log_a(x)} = x$

8) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

9) $\log_a(a^x) = x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$$\log_3(81) \quad , \quad \log_5(\sqrt{5}) \quad , \quad \log_7\left(\frac{1}{49}\right) \quad , \quad \log_2(2)$$

$$\log_8(512) \quad , \quad \log_4(4^{3.2}) \quad , \quad \log_2\left(\frac{1}{32}\right) \quad , \quad \log_{16}(\sqrt{2})$$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81) = y$

$3^y = 81$ نكتب بصيغة اسية

$3^y = 3^4$

$y = 4$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_3(81) = 4$ ولهذا فأن

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5}) = y$

$5^y = \sqrt{5}$ نكتب بصيغة اسية

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ ولهذا فأن

تفاضل الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $y = \log_a(u)$ حيث $a \neq 1 , a > 0$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

فأن:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 - 5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2+4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2+4} \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3 \sqrt{x^2+1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f \circ g)_{(x)}$ ، $(g \circ f)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g\big(f(x)\big) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x \cdot \log_a(a) = x \cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

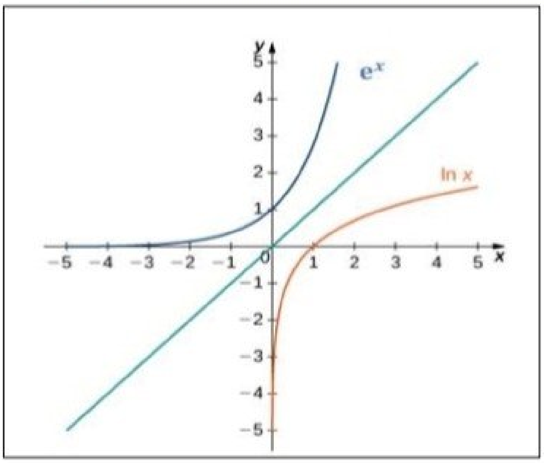
دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

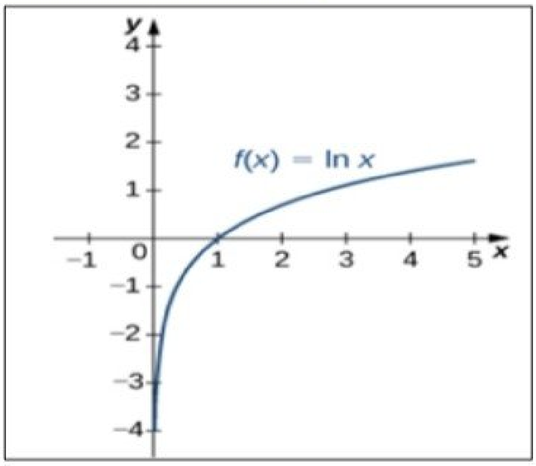
أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $10^y = x$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0 \quad \text{and} \quad \ln(e^x) = x \text{ for all } x}$$





أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. وأن

$$\lim_{x \to \infty} (\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} (\ln x) = -\infty$$

وأستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln \frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2 \ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

تفاضل اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7 \ln(4x)$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \cdot \left(\frac{1}{4x}\right) \cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \csc x \cdot \sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x + 1))^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (\ln(3x + 1))^{1/2} \left(\frac{1}{3x + 1}\right) (3) = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\ln(3x + 1)}}{3x + 1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

الاسبوع السابع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم الغايات هو تشكيل الفهم الاساس لفهم التغيرات والسلوك اللحظي للدوال وفهم استمرارية الدوال

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

الغايات غاية الدوال الجبرية و المثلثية

I- الدالـة الأسيـــة النبـريـــة :

تمهيـــد :

نعلم أن دالة اللوغاريتم النبري $\ln$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

إذن الدالة $\ln$ تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

إذن : تقبل دالة عكسيـة معرفة مـن $\mathbb{R}$ نحـو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبري هي الدالة الأسيـة النبريـة والتي نرمز لها بـ $\exp$.

استنتـاج :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y\in\mathbb{R}$$
$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y$$

ملاحظـة :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad ; \quad \exp(x) = e^x$$

خاصيـات :

-1
$$\exp(1) = e^1 = e$$
$$\exp(0) = e^0 = 1$$

-2
- $\forall x\in\mathbb{R} \quad ; \quad e^x \succ 0$
- $\forall x\in\mathbb{R} \quad ; \quad \ln e^x = x$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad ; \quad e^{\ln x} = x$

-3 الدالة $\exp$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
- $e^x \succ e^y \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

-4
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

5- نهايــات مهمــة :

a- $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

برهــان :

نضع : $X = e^x$

إذن : $\ln X = x$ $\qquad (x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b- $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0}$$

برهــان :

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$

نضع : $X = -x$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X}$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

c- $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

برهــان :

نضع : $e^x = X$

إذن : $(x \to 0) \Leftrightarrow (X \to 1)$

ومنه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{X \to 1} \frac{X - 1}{\ln X}$

$$= \lim_{X \to 1} \frac{1}{\frac{\ln X}{X - 1}} = 1$$

تطبيـــق :

أحســـب :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{2\times\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع : $X = \frac{x}{2}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^X}{X}\right)^2$$

$$= +\infty$$

أحســب :

$$x \geq 2\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\,\frac{x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

نضع : $X = \frac{x}{n}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n$$

$$= +\infty$$

أحســب :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x}-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}\cdot(x-1)$$

$$= 1\cdot(0-1) = -1$$

لأن : $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x} = \lim_{X\to0} \frac{e^X-1}{X} = 1$

(وضعنا : $X = x^2 - x$)

6- مشتقـة الدالـة الأسيــة النبـريـة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \qquad Log\ e^{x} = x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \qquad \left(Log\ e^{x}\right)' = 1$

أي : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \qquad Log'\left(e^{x}\right) \times \left(e^{x}\right)' = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \qquad \frac{\left(e^{x}\right)'}{e^{x}} = 1$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \qquad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

تعميـم :

لتكن f دالة عددية معرفـة بـ : $f(x) = e^{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

فإن : f قابلة للاشتقاق على المجال I .

$$\forall x \in I \ ; \quad f(x)' = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

تطبيـق :

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التاليـة :

-1 $\quad f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x + 1}$

$$f'(x) = \frac{e^{x}(x-1) - \left(e^{x}-1\right)}{(x+1)^{2}}$$

$$= \frac{x\, e^{x} + 1}{(x+1)^{2}}$$

-2 $\quad f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\sqrt{x}}\right)' \\ &= \left(\sqrt{x}\right)' \times e^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

-3 $\quad f(x) = x\, e^{\left(x^{2}-1\right)}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\left(x^{2}-1\right)} + x\,(2x)\, e^{\left(x^{2}-1\right)}$$

$$= \left(1 + 2x^{2}\right) e^{\left(x^{2}-1\right)}$$

تماريـن تطبيـقيـة :

أحسـب النهـايــات :

-1
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نضع : $X = 2x$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{X}{e^{X}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

-2
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{X\to0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$$

-3
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+1}{e^{x}+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+3e^{-x}} = 1$$

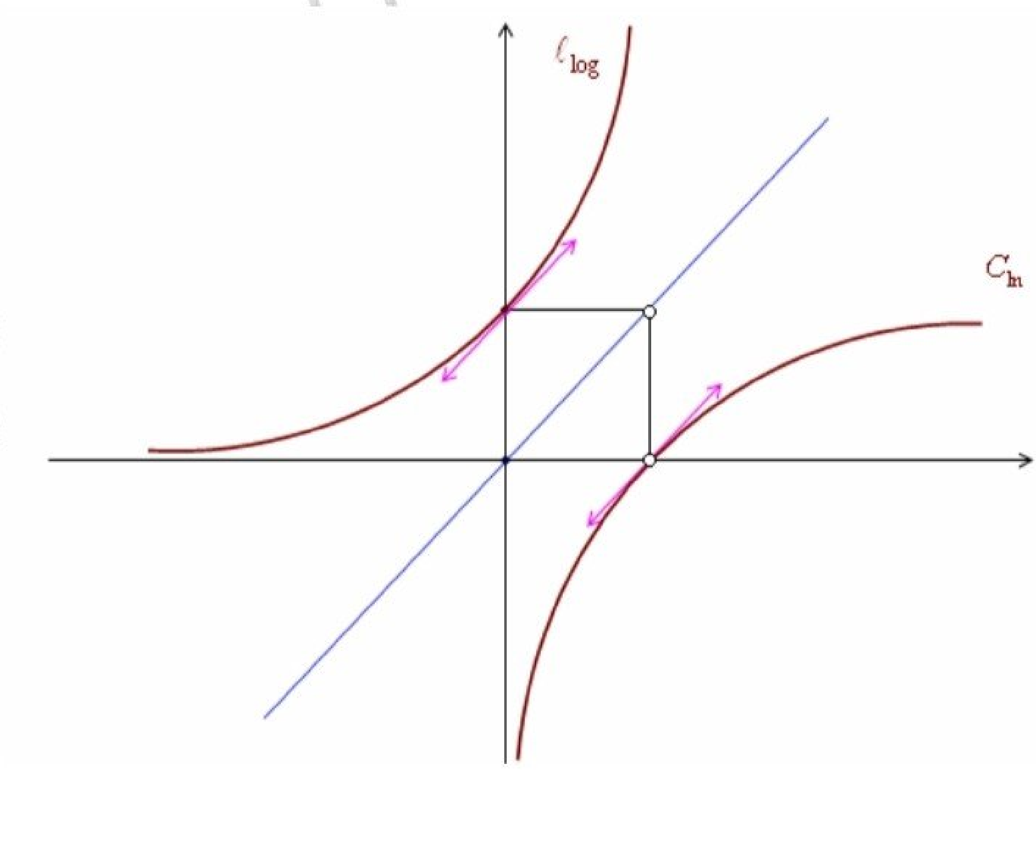
7- <u>التقعـــر :</u>

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad \left(e^{x}\right)'' = \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

وبما أن : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad e^{x} \succ 0$

فإن : ℓ المنحنى الممثل للدالة الأسيـة النبريـة (محدب).



تطبيـــق 4 :

$$f(x) = (x-1)\cdot e^x$$

- **مجموعة التعريف :**

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ,\ +\infty[$$

- **النهايـــات :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\cdot e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)\cdot e^x = -1\cdot 0 \qquad (F.I)$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$$

- **التغيـــرات :**

لدينا : لكل x **من** $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-1)\cdot e^x$$

إذن :

$$f'(x) = 1\cdot e^x + (x-1)\,e^x$$
$$= x\,e^x$$

- **جـدول التغيـــرات :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- **الفـروع اللانهـائيـــة :**

لدينا :

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

نحسب :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x-1}{x}\cdot e^x$$
$$= 1\times(+\infty) = +\infty$$

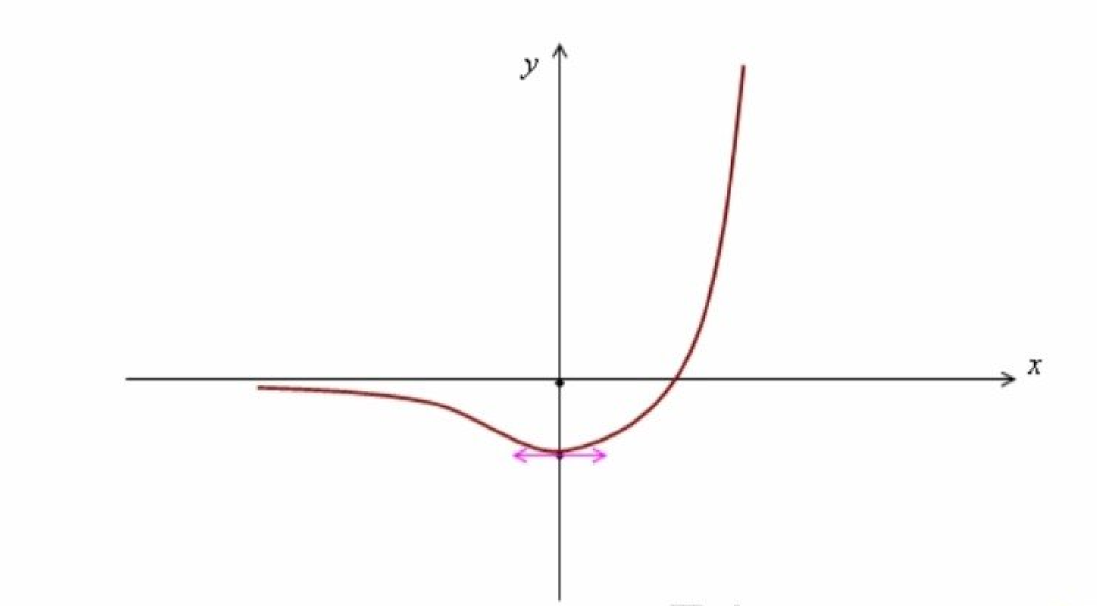
إذن : (ℓ_f) **يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.**

- **التقعـر ونقـط الانـعطـاف :**

لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ; \qquad f'(x) = x\,e^x$$
$$f''(x) = 1\,e^x + x\,e^x$$
$$= (1+x)\cdot e^x$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
التقعـر		$\frac{-2}{e}$	



تطبيـق 5 :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

- **مجموعة التعريف :**

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ e^x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

- **النهايـــات :**

- $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$
- $\lim\limits_{-\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- **التغيــرات :**

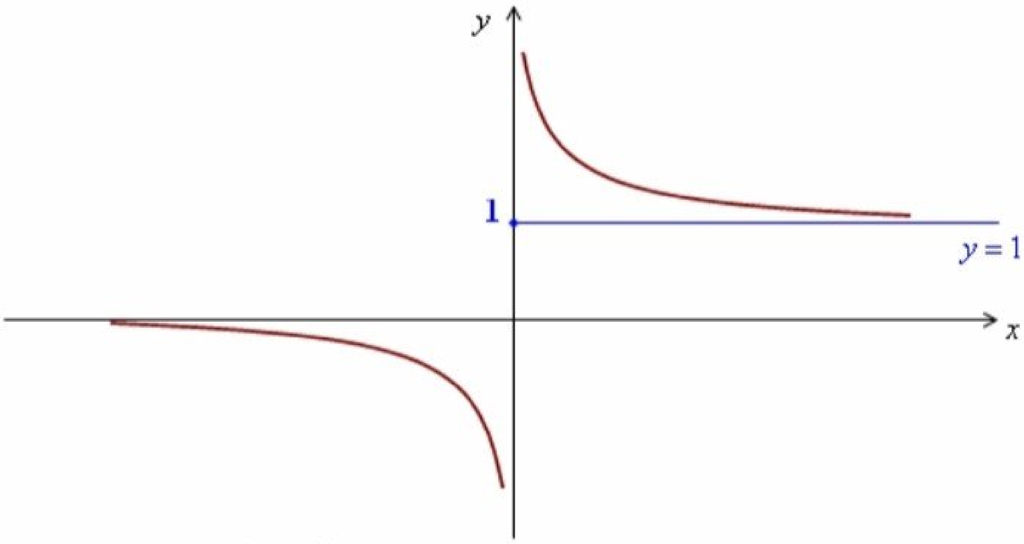
لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

$$f'(x) = \frac{e^x (e^x - 1)' - e^x (e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}} \prec 0$$

- جـدول التغيـــرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 1$



الاسبوع الثامن

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة

الهدف من تعلم المتواليات هو فهم كيف تتغير الكميات بشكل منتظم او غير منتظم عبر الزمن او عبر خطوات معينة وهو امر اساسي في الرياضيات والفيزياء وعلوم الحاسوب

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المتواليات

I) عموميات.

1- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

$$u : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

ترميز:

* نرمز ل $u(n)$ بالرمز u_n.
* نرمز للمتتالية u بالرمز: $(U_n)_{n\in I}$
* u_n يسمى الحد ذا المد ل n.

ملاحظة:

1- لا يجب الخلط بين: $(U_n)_{n\in I}$ التي تمثل التطبيق u و u_n الذي يمثل عدد حقيقي.

و $\{U_n\}_{n\in I}$ التي تمثل مجموعة القيم التي تأخذها المتتالية.

2- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ منتهية إذا كانت I منتهية ونقول إنها غير منتهية إذا كانت I غير منتهية.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \sqrt{n^2+1}$

لدينا: $u_o = 1$; $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{5}$; $u_3 = \sqrt{10}$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n = (-1)^n$

$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$

$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1,1\}$

ملاحظة:

يمكن لمتتالية أن تكون معرفة بالعبارة الصريحة لحدها العام أو بالترجع وذلك حينما يتم حساب حد ما بالرجوع إلى حدود سابقة.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

لدينا: $u_1 = 2u_0 - 3 = -1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = -5$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

لدينا: $u_2 = 2u_1 - u_0 = 3$

$u_3 = 2u_2 - u_1 = 4$

2- تساوي متتاليتين

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n\in I}$ و $(V_n)_{n\in J}$ متسويتين إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} I = J \\ (\forall n\in I)\, u_n = v_n \end{cases}$$

3- العمليات على المتتاليات:

نعرف مجموع وجداء متتاليتين وضرب عدد في متتالية كما يلي:

$$(U_n)_{n\in I} + (V_n)_{n\in I} = (U_n + V_n)_{n\in I}$$
$$(U_n)_{n\in I} . (V_n)_{n\in I} = (U_n . V_n)_{n\in I}$$
$$\lambda(U_n)_{n\in I} = (\lambda U_n)_{n\in I}$$

4- المتتالية الدورية:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي غير منعدم p بحيث $(\forall n \geq n_0)\, U_{n+p} = U_n$

- أصغر عدد p يحقق الشرط يسمى دور المتتالية.

مثال:

نعبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

لدينا: $(\forall n \geq n_0)\, u_{n+6} = \cos\left(\frac{(n+6)\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = U_n$

إذن (U_n) دورية دورها 6.

II) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

مكبورة، إذا وفقط إذا كان: $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n\in I)\, u_n \leq M$

مصغورة، إذا وفقط إذا: $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n\in I)\, m \leq u_n$

محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني:

$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall n\in I)\, m \leq u_n \leq M$

ملاحظة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا:

$(\exists M \rangle 0)(\forall n\in I)\, |u_n| \leq M$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بحيث $u_n = \frac{1}{n}$

لدينا: $n \geq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

يعني: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\, 0 \langle \frac{1}{n} \leq 1$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\, 0 \langle u_n \leq 1$

إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ محدودة.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

لدينا: $|u_n| = \frac{1}{n^2+1}$

ولدينا: $n^2 \geq 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

$n^2 + 1 \geq 1$

يعني: $\frac{1}{n^2+1} \leq 1$

يعني: $|u_n| \le 1$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

3- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

لنبين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مصغورة ب 2:

يعني: $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n$

نستعمل الاستدلال بالتراجع:

لدينا من أجل $n=0$ ؛ $u_0=3\ge 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل n يعني $u_n\ge 2$

لنبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ يعني $u_{n+1}\ge 2$.

لدينا: $u_n\ge 2$

يعني $u_n+2\ge 4$

يعني $\sqrt{u_n+2}\ge 2$

إذن $u_{n+1}\ge 2$

طريقة أخرى:

لدينا:
$$u_{n+1}-2=\sqrt{u_n+2}-2=\frac{(u_n+2)-4}{\sqrt{u_n+2}+2}=\frac{u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+2}\ge 0$$

لأن $u_n\ge 2$

إذن $u_{n+1}\ge 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي $u_n\ge 2$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

ومنه $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مصغورة ب 2.

III) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$

تزايدية، إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\ge n_0)\ u_n\le u_{n+1}$

تزايدية قطعا: $(\forall n\ge n_0)\ u_n< u_{n+1}$

تناقصية: $(\forall n\ge n_0)\ u_n\ge u_{n+1}$

قطعا: $(\forall n\ge n_0)\ u_n> u_{n+1}$

ثابتة إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\ge n_0)\ u_n= u_{n+1}$

ملاحظة:

← من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة: $u_{n+1}-u_n$

- إذا كان $u_{n+1}-u_n\ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.
- إذا كان $u_{n+1}-u_n\le 0$ فإن (U_n) تناقصية.
- إذا كان $u_{n+1}-u_n= 0$ فإن (U_n) ثابتة.

← نقول إن المتتالية (U_n) رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

← تكون المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$:

- تزايدية: $(\forall p,q\ge n_0)\quad p\le q\Rightarrow u_p\le u_q$
- تناقصية: $p\le q\Rightarrow u_p\ge u_q$
- ثابتة: $p<q\Rightarrow u_p=u_q$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n=3n-4$

لندرس رتابة (U_n):

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=3(n+1)-4-(3n-4)$$
$$=3n-1-3n+4=3>0$$

إذن (U_n) تزايدية قطعا.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

لندرس الرتابة:

وجدنا سابقا أن $u_n\ge 2$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

- لندرس رتابة (U_n)

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+2}-u_n=\frac{u_n+2-u_n^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$$

لندرس إشارة: $-u_n^2+u_n+2$

لندرس إشارة: $-x^2+x+2$

$\Delta=9$

$x_1=2$; $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ولدينا $u_n\ge 2$ إذن: $-u_n^2+u_n+2\le 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\le 0$

إذن (U_n) تناقصية.

طريقة أخرى:

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+2}-\sqrt{u_{n-1}+2}=\frac{u_n-u_{n-1}}{\sqrt{u_n+2}+\sqrt{u_{n-1}+2}}$$

إذن إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي إشارة u_n-u_{n-1}:

إذن $u_{n+1}-u_n$ له إشارة ثابتة هي إشارة u_1-u_0

ولدينا: $u_1-u_0=\sqrt{5}-3<0$

إذن $u_{n+1}-u_n<0$

ومنه (U_n) تناقصية.

IV) دراسة بعض المتتاليات الترجعية:

1- المتتاليات الحسابية:

a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=u_n+r$

- العدد r يسمى أساس هذه المتتالية.

و u_0 الحد الأول لهذه المتتالية.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتا وهذه الثابتة هي الأساس.
- كل متتالية حسابية تكون معرفة بعددها الأول وأساسها. أو بحدها وأساسها.

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_n=-5n+1$

لنبين أن (U_n) حسابية:

لدينا:
$$U_{n+1}-U_n=-5(n+1)+1-(-5n+1)$$
$$=-5$$

إذن المتتالية (U_n) أساسها $r=-5$ وحدها الأول: $u_0=1$.

2- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=-10$

لنحسب u_5:

نعلم أن:
$$u_{n+1}=u_n+r$$
$$u_{n+1}=u_n+3$$

إذن:
$$u_1=u_0+3=-7$$
$$u_2=u_1+3=-4$$
$$u_3=u_2+3=-1$$
$$u_4=u_3+3=2$$
$$u_5=u_4+3=5$$

b) خاصية مميزة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(U_n) \text{ حسابية } \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}-U_n=U_n-U_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ 2U_n=U_{n+1}+U_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ U_n=\frac{U_{n+1}+U_{n-1}}{2}$$

خاصية:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\qquad U_n=\frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$$
يعني $U_{n-1}+U_{n+1}=2U_n$

ملاحظة:

تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$

c) الحد العام لمتتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r:

نعلم أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}=U_n+r$

إذن:
$$u_1=u_0+r$$
$$u_2=u_1+r$$
$$u_3=u_2+r$$
$$\vdots$$
$$u_n=u_{n-1}+r$$

بجمع أطراف المتفاوتات نحصل على:
$$u_n=u_0+\underbrace{r+r+\ldots+r}_{n\text{ مرة}}$$

أي $u_n=u_0+nr$.

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0.

لدينا: $U_n=U_0+nr \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

ملاحظة:

إذا كان الحد الأول هو u_1: $U_n=U_1+(n-1)r$

بصفة عامة: إذا كان u_p و u_n حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $u_n=u_p+(n-p)r$ (ترتيب n و p غير مهم).

أمثلة:

1- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_1=-10$

لنحسب u_{100}

لدينا:
$$u_{100}=u_1+(100-1)r$$
$$=u_1+99r=-10+99\times4$$
$$=-10+396=386=u_{100}$$

2- (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=-3$ و $u_{20}=100$

لنحسب u_5 و u_0

لدينا:
$$u_5=u_{20}+(5-20)r$$
$$=100+45=145.$$
و
$$u_0=u_5+(0-5)r$$
$$=145+15=160.$$

3- (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r بحيث $U_{10}=30$ و $U_{20}=100$

حدد الحد العام:

لنحدد r:

لدينا: $u_{20}=u_{10}+(20-10)r$

يعني: $r=\frac{u_{20}-u_{10}}{10}=\frac{100-30}{10}$

يعني: $r=7$

إذن:
$$(\forall n\in\mathbb{N})u_n=u_{10}+(n-10)r$$
$$=30+7n-70$$
$$=7n-40$$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N})u_n=7n-40$

d) مجموع حدود متتابعة متتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لنحسب $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

لدينا: $S=u_0+u_1+\ldots+u_k+\ldots+u_{n-1}+u_n$

و $S=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_{n-k}+\ldots+u_0$

$$2S=(u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+\ldots+(u_k+u_{n-k})+\ldots(u_n+u_0)$$

ولدينا:
$$u_k=u_0+kr$$
$$u_{n-k}=u_0+(n-k)r$$

إذن:
$$u_k+u_{n-k}=u_0+u_0+nr$$
$$=u_0+u_n$$

إذن $(\forall k\in\mathbb{N})\ u_k+u_{n-k}=u_0+u_n$

$$2S=\underbrace{(u_0+u_n)+(u_0+u_n)+\ldots+(u_0+u_n)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+1 \text{ مرة}}$$

إذن: $2S = (u_0+u_n)(n+1)$

$$S = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0+u_1+u_2+...+u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$u_1+u_2+...+u_n = n\cdot\frac{u_1+u_n}{2}$$

$$u_p+u_{p+1}+...+u_n = (n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}$$

أمثلة:

1) أحسب: $S = 43+47+51+...+203$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=43$

نضع $u_n=203$ ولنحدد n

نعلم أن: $u_n = u_0+nr$

$u_n = 43+4n$

إذن $u_n = 203 \Leftrightarrow 4n = 203-43$

$\Leftrightarrow n = \frac{160}{4} = 40$

إذن $203 = u_{40}$

إذن: $S = u_0+u_1+...+u_{40} = (40+1)\frac{u_0+u_{40}}{2}$

$= 41\cdot\frac{43+203}{2}$

إذن $S = 5043$

2) لنحسب $S = 1+2+...+n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=1$ وعدد حدوده هو n.

إذن $S = n.\frac{1+n}{2}$

أي $1+2+...+n = n\left(\frac{1+n}{2}\right)$

3) لنحسب $S = 2+4+...+2n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=2$ عدد حدوده هو n.

إذن $S = n.\frac{2+2n}{2} = n(1+n)$

2- المتتالية الهندسية:

a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1} = q.u_n$

q يسمى أساس (U_n).

ملاحظات:

* تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت.
* تكون المتتالية الهندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.
* إذا كان $u_0=0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=0$
* إذا كان $q=0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=0$
* إذا كان $q=1$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=u_0$

b) خاصية مميزة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية إذا وفقط إذا كان:

$$u_{n+1}.u_{n-1} = u_n^2$$

ملاحظة:

تكون الأعداد c,b,a في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a.c=b^2$

c) الحد العام لمتتالية هندسية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q\neq 0$ وحدها الأول $u_0\neq 0$

لنحسب u_n بدلالة n

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1} = qu_n$

إذن $u_1 = qu_0$

$u_2 = qu_1$

.

.

.

$u_n = qu_{n-1}$

بضرب أطراف المتساويات نجد: $u_n = u_0.\underbrace{q.q....q}_{n \text{ مرة}}$

إذن $u_0 = u_0.q^n$

وهذه العلاقة تبقى صحيحة إذا كان $q=0$ أو $u_0=0$

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مجموعة هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n = u_0.q^n$

ملاحظة:

إذا كان u_1 هو الحد الأول: $u_n = u_1.q^{n-1}$

بصفة عامة: إذا كان u_n و u_p حدين من مجموعة هندسية أساسها q

فإن: $u_n = u_p.q^{n-p}$ (ترتيب n و p غير مهم).

d) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لنحسب: $S = u_0+u_1+u_2+...+u_n$

* إذا كان $q=1$ فإن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n = u_0$

إذن $S = \underbrace{u_0+u_0+...+u_0}_{n+1 \text{ مرة}} = (n+1)u_0$

* إذا كان $q \neq 1$ فإن:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ولدينا $u_k = u_0 q^k$

إذن: $(1)\ S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + ... + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$

$(2)\ qS = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + ... + u_0 q^n + u_0 q^{n+1}$

من $(2)-(1)$ نجد:

$$S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1}$$

يعني: $S = u_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} ; q \neq 1 \\ (n+1) u_0 ; q = 1 \end{cases}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة: $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p . \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

أمثلة:

1) لنحسب: $S = 3 + 3\times 2 + 3 \times 2^2 + ... + 3 \times 2^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$ وعدد حدوده: $n+1$

إذن: $S = 3 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$= 3 . \frac{1-2^{n+1}}{-1} = -3\left(1-2^{n+1}\right) = 3\left(2^{n+1}-1\right)$

2) ليكن $x \neq 1$ لنحسب: $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها α وعدد حدوده $n+1$.

إذن: $S = 1 . \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

إذن $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

3- المتتالية التي تحقق: $a \neq 1\ b \neq 0,\ U_{n+1} = au_n + b$

نعتبر العلاقة $U_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

*) لنحدد المتتاليات الثابتة التي تحقق العلاقة (1):

نضع $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = \alpha$

$\left((U_n) \text{ تحقق } (1)\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$

$\Leftrightarrow \alpha = a\alpha + b$

$\Leftrightarrow (1-a)\alpha = b$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{1-a}$

إذن توجد متتالية ثابتة وحيدة تحقق (1) هي $u_n = \alpha$ مع $\alpha = \frac{b}{1-a}$

*) لنحدد جميع المتتاليات التي تحقق (1)

لدينا $u_n = \alpha$ تحقق (1) إذن: $\alpha = a\alpha + b$

يعني: $b = \alpha - a\alpha$

$\left((U_n) \text{ تحقق } (1)\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - \alpha = a\left(u_n - \alpha\right) *$

نضع $v_n = u_n - \alpha$

لدينا: $* \Leftrightarrow v_{n+1} = av_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها a.

إذن $v_n = v_0 . q^n$

أي $v_n = v_0 . a^n$

ويعني $v_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n$

ولدينا: $v_n = u_n - \alpha$

يعني $u_n = v_n + \alpha$

يعني $u_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n + \alpha$

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي $u_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n + \alpha$

حيث $u_0 \in \mathbb{R}$ و α حل للمعادلة $x = ax + b$

خاصية:

من أجل البحث عن جميع المتتاليات التي تحقق العلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

نقوم بحل المعادلة $x = ax + b$ ليكن α حلها.

نضع $v_n = u_n - \alpha$ ثم نبين أن (v_n) هندسية أساسها سيكون v

نستنتج الحد العام ل (v_n) ثم نستنتج الحد العام ل (u_n).

مثال:

حدد الحد العام للمتتالية (u_n):

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

لنحل المعادلة $x = 2x - 3$

يعني $x = 3$

نضع $v_n = u_n - 3$ لنبين أن (v_n) هندسية.

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= 2u_n - 3 - 3$

$= 2u_n - 6$

$= 2\left(u_n - 3\right) = 2v_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 3 = -2$

إذن $v_n = v_0 . q$

$= -2.2^n$

$v_n = -2^{n+1}$

ولدينا $v_n = u_n - 3$ يعني $u_n = v_n + 3$

يعني $u_n = -2^{n+1} + 3$

4- المتتاليات التي تحقق: $b\neq 0\ ,\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

نعتبر العلاقة (1) : $b\neq 0,u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

a) خاصيات:

خاصية (1):

إذا كانت (u_n) و(v_n) ممتتاليتان تحققان العلاقة (1) فإن كل متتالية على شكل: $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ حيث $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

برهان:

نفترض أن (u_n) و (v_n) تحققان (1)

نضع $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ (مع α و $\beta\in\mathbb{R}$).

لنبين أن (w_n) تحقق العلاقة (1):

يعني: $w_{n+2}=aw_{n+1}+bw_n$

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+2}&=\alpha u_{n+2}+\beta v_{n+2}\\ &=\alpha\left(au_{n+1}+bu_n\right)+\left(av_{n+1}+bv_n\right)\\ &=a\left(\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}\right)+b\left(\alpha u_n+\beta v_n\right)\\ &=aw_{n+1}+bw_n \end{aligned}$$

إذن (w_n) تحقق (1).

خاصية (2):

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتين تحققان (1) وغير متناسبتين (لا يوجد γ بحيث $v_n=\gamma u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ يعني $\frac{v_n}{u_n}\neq cste$) فإن المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

برهان:

لتكن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين وتحققان (1)

وجدنا من خلال ما سبق أن كل متتالية على شكل: $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ تحقق (1).

عكسيا: لتكن (w_n) متتالية تحقق (1)

لنبين أنه يوجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n=\alpha u_n+\beta v_n$

إذن:

$$\begin{cases} w_n=\alpha u_n+\beta v_n\\ w_{n+1}=\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}\end{cases}$$

نحصل إذن على النظمة: $(S)\begin{cases}\alpha u_n+\beta v_n=w_n\\ \alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}=w_{n+1}\end{cases}$

مجاهلها هما α و β:

لدينا: $\Delta_n=\begin{vmatrix}u_n & v_n\\ u_{n+1} & v_{n+1}\end{vmatrix}=u_nv_{n+1}-v_nu_{n+1}$

لدينا: $\Delta_{n+1}=u_{n+1}.v_{n+2}-v_{n+1}.u_{n+2}$

$$\begin{aligned} &u_{n+1}\left(av_{n+1}+bv_n\right)-v_{n+1}\left(au_{n+1}+bu_n\right)\\ \Delta_{n+1}&=bu_{n+1}.v_n-bv_{n+1}.u_n\\ &=-b\left(u_n.v_{n+1}-v_n.u_{n+1}\right)=-b\Delta_n \end{aligned}$$

إذن (Δ_n) هندسية أساسها $q=-b$ وحدها الأول Δ_0.

$$\Delta_n=\Delta_0.q^n=(-b)^n.\Delta_0$$

لنبين أن $\Delta_0\neq 0$

نفترض العكس يعني $\Delta_0=0$

إذن $\Delta_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

يعني $u_nv_{n+1}-v_nu_{n+1}=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

يعني $\frac{u_n}{v_n}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

هذا يعني أن $\frac{u_n}{v_n}$ ثابتة يعني: $(\forall n\in\mathbb{N})\frac{u_n}{v_n}=\gamma$

يعني: $u_n=\gamma v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

وهذا تناقض لأن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

إذن $\Delta_0\neq 0$ ومنه: $(\forall n\in\mathbb{N})\Delta_n\neq 0$

إذن النظمة (S) تقبل حلا وحيدا. (α,β)

لنبين أن α و β لا يتعلقان ب n:

$$\Delta_n^\alpha=\begin{vmatrix}w_n & v_n\\ w_{n+1} & v_{n+1}\end{vmatrix}=w_n.v_{n+1}-w_{n+1}.v_n$$

بنفس الطريقة نبين أن (Δ_n^α) هندسية أساسها $-b$

إذن $\Delta_n^\alpha=\Delta_0^\alpha.(-b)^n$

إذن

$$\alpha=\frac{\Delta_n^\alpha}{\Delta_n}=\frac{\Delta_0^\alpha(-b)^n}{\Delta_0(-b)^n}=\frac{w_0v_1-w_1v_0}{u_0v_1-u_1v_0}$$

إذن α ثابتة، وبنفس الطرقة نبين أن β ثابتة.

إذن يوجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث: $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$.

b) البحث عن المتتاليات التي تحقق (1):

لنبحث عن المتتاليات الهندسية التي تحقق (1):

لتكن (U_n) أساسها $q\neq 0$ و $u_0\neq 0$

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=u_0.q^n$

$$\begin{aligned} \left((U_n)\ \text{تحقق (1)}\right)&\Leftrightarrow u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\\ &\Leftrightarrow u_0.q^{n+2}=a.u_0q^{n+1}+bu_0.q^n\\ &\Leftrightarrow u_0.q^n\left(q^2-aq-b\right)=0\\ &\Leftrightarrow q^2-aq-b=0 \end{aligned}$$

تعريف:

المعادلة $q^2-aq-b=0$ تسمى المعادلة المميزة للعلاقة (1).

نعتبر إذن المعادلة $q^2-aq-b=0$ (E)

$$\Delta=a^2+4b$$

إذا كان $\Delta\rangle 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2.

إذن: $u_n=q_1^n$ و $v_n=q_2^n$ تحققان (1)

ولدينا: $\frac{V_n}{U_n}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n\neq cte$ لأن $q_1\neq q_2$

إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$$w_n=\alpha u_n+\beta v_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$$

إذا كان $\Delta=0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا: $q=\frac{a}{2}$

إذن المتتالية $u_n=q^n$ تحقق العلاقة (1)

نضع $v_n=nu_n$ لنبين أن (V_n) تحقق (1)

يعني $v_{n+2}=av_{n+1}+bv_n$

لدينا: $v_{n+2}-(av_{n+1}+bv_n)=(n+2)q^{n+2}-a(n+1)q^{n+1}-bnq^n$

$$=nq^{n+2}+2q^{n+2}-anq^{n+1}-aq^{n+1}-bnq^n$$

$$=nq^n\underbrace{(q^2-aq-b)}_{0=}+q^{n+1}(2q-a)=0$$

لأن $q=\frac{a}{2}$ و $q^2-aq-b=0$

إذن (V_n) تحقق (1).

ولدينا $\frac{V_n}{U_n}=n\neq cste$ إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين. وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) على التي تكتب على شكل:

$$w_n=\alpha u_n+\beta v_n$$
$$=\alpha q^n+\beta n.q^n$$
$$w_n=(\alpha+\beta n)q^n\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

إذا كان $\Delta<0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين في $\mathbb{C}$ هما:

$q=re^{i\theta}$ و $\bar{q}$

لدينا: $q^2-aq-b=0$

يعني $q^{n+2}-aq^{n+1}-bq^n=0$

يعني $r^{n+2}.e^{i(n+2)\theta}-a.r^{n+1}.e^{i(n+1)\theta}-br^n.e^{in\theta}=0$

$$\Leftrightarrow r^{n+2}\left(\cos((n+2)\theta)+i\sin((n+2)\theta)\right)$$
$$-ar^{n+1}\left(\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)\right)$$
$$-br^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[r^{n+2}\cos((n+2)\theta)-ar^{n+1}\cos((n+1)\theta)-br^n\cos n\theta\right]$$
$$+i\left[r^{n+2}\sin((n+2)\theta)-ar^{n+1}\sin((n+1)\theta)-br^n\sin n\theta\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}r^{n+2}\cos((n+2)\theta)=ar^{n+1}\cos((n+1)\theta)+br^n\cos n\theta\\ r^{n+2}\sin((n+2)\theta)=ar^{n+1}\sin((n+1)\theta)+br^n\sin n\theta\end{cases}*$$

نضع: $u_n=r^n\cos n\theta$

و $v_n=r^n\sin n\theta$

$$*\Leftrightarrow\begin{cases}u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\\ v_{n+2}=av_{n+1}+bv_n\end{cases}$$

إذن (u_n) و (v_n) تحققان العلاقة (1)

ولدينا: $\frac{v_n}{u_n}=tg(n\theta)\neq cste$

إذن (U_n) و (V_n) غير متناسبتين.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

أي
$$w_n=\alpha(r^n\cos n\theta)+\beta(r^n\sin n\theta)$$
$$=r^n(\alpha\cos n\theta+\beta\sin n\theta)$$

خاصية:

نعتبر العلاقة $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ $(b\neq 0)$

لتكن (E): $q^2-aq-b=0$ المعادلة المميزة ل (1)

ليكن $\Delta=a^2+4b$

إذا كان $\Delta>0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2. وتكون المتتاليات التي تحقق العلاقة (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$ حيث α و β من $\mathbb{R}$.

إذا كان $\Delta=0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا q.
وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n=(\alpha+\beta n)q^n$ حيث (α و β من $\mathbb{R}$).

إذا كان $\Delta<0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين $q=re^{i\theta}$ و $\bar{q}$
وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n=r^n(\alpha\cos n\theta+\beta\sin n\theta)$ (α و β من $\mathbb{R}$).

تمرين تطبيقي:

حدد الحد العام للمتتالية (U_n) في الحالات التالية:

1- $\begin{cases}u_0=1\ ,\ u_1=-1\\ u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n\end{cases}$

2- $\begin{cases}u_0=1\ ,\ u_1=2\\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n\end{cases}$

3- $\begin{cases}u_0=1\ ,\ u_1=-1\\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n\end{cases}$

1- المعادلة المميزة هي: $(E): q^2-5q+6=0$

$$\Delta=25-24=1$$

$q_1=2$; $q_2=3$

إذن: $u_n=\alpha 2^n+\beta 3^n$

ولدينا: $\begin{cases}u_0=1\\ u_1=-1\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ 2\alpha+3\beta=-1\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=3-2=1$$
$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}=3+1=4$$
$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-1-2=-3$$

إذن $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-3\end{cases}$

إذن
$$u_n=4.2^n-3.3^n$$
$$u_n=2^{n+2}-3^{n+1}$$

2- المعادلة المميزة هي: $(E):\ q^2-6q+9=0$

لنحل (E): $\Delta=36-36=0$

إذن $q=\frac{6}{2}=3$

إذن: $u_n=(\alpha+\beta n).3^n$

ولدينا: $\begin{cases}u_0=1\\ u_1=2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ 3(\alpha+\beta)=2\end{cases}$

يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-\frac{1}{3}\end{cases}$

إذن: $u_n=\left(1-\frac{1}{3}n\right)3^n$

3- المعادلة المميزة هي: $(E):\ q^2-q+1=0$

لنحل (E): $\Delta=1-4=-3$

إذن: $q_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $q_2=\overline{q_1}$

لدينا: $q_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $u_n=1^n\left(\alpha\cos n\frac{\pi}{3}+\beta\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

يعني: $u_n=\alpha\cos n\frac{\pi}{3}+\beta\sin n\frac{\pi}{3}$

ولدينا: $\begin{cases}u_0=1\\ u_1=-2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha\cos\frac{\pi}{3}+\beta\sin\frac{\pi}{3}=-2\end{cases}$

يعني: $\begin{cases}\alpha=1\\ \frac{1}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta=-2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\frac{-5}{\sqrt{3}}\end{cases}$

إذن: $u_n=\cos n\frac{\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin n\frac{\pi}{3}$

V- نهاية متتالية:

1- تعريف

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):\ n>n_0\Rightarrow U_n>A$$

ونكتب: $\lim U_n=+\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):\ n>n_0\Rightarrow U_n<-A$$

ونكتب $\lim U_n=-\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان: $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$

ونكتب: $\lim U_n=l$ ونقول في هذه الحالة إن المتتالية (U_n) متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

مثال:

نعتبر المتتالية: $U_n=\sqrt{n}$

لنبين أن $\lim U_n=+\infty$ يعني: $(\forall A>0)(n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow u_n>A$

ليكن: $A>0$ لنبحث عن $n_0\in\mathbb{N}^*$ بحيث $n>n_0\Rightarrow u_n>A$

لدينا $u_n>A$

يعني $\sqrt{n}>A$ يعني $n>A^2$

يكفي أن نأخذ $n_0\geq A^2$

مثلا: $n_0=E(A^2)+1$

لدينا: $n>n_0\Rightarrow n>A^2$

$\Rightarrow\sqrt{n}>A$

$\Rightarrow u_n>A$

إذن: $(\forall A>0)(n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow u_n>A$

إذن: $\lim U_n=+\infty$

بنفس الطريقة نبين أن:

$$(p\in\mathbb{N}^*)\ \lim n^p=+\infty;\ \lim\frac{1}{n}=0;\lim\sqrt[p]{n}=+\infty$$

ملاحظة:

← $\lim|u_n|=0\Leftrightarrow\lim u_n=0$

← $\lim(u_n-l)=0\Leftrightarrow\lim u_n=l$

← $\lim|u_n-l|=0\Leftrightarrow\lim u_n=l$

← $\lim u_n=l\Rightarrow\lim|u_n|=|l|$ والعكس خاطئ

مثال: نعتبر $u_n=(-1)^n$

$|u_n|=1$ إذن $\lim|u_n|=1$

لكن (U_n) لا تقبل نهاية.

2- مصادق التقارب:

خاصية:

1) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $|u_n-l|\leq v_n$ انطلاقا من صف ما.

لدينا: $\lim v_n=0\Rightarrow\lim u_n=l$

2) لتكن (u_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $u_n\leq v_n$ انطلاقا من صف ما:

$\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim v_n=+\infty$

$\lim v_n=-\infty\Leftrightarrow\lim u_n=-\infty$

3) لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات بحيث:

$w_n\leq u_n\leq v_n$ انطلاقا من صف ما.

إذا كانت (v_n) و (w_n) متقاربتين ولهما نفس النهاية l فإن: (u_n) متقاربة و $\lim u_n=l$.

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}$

لدينا: $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

ليكن: $n\in\mathbb{N}^*$

لدينا: $(\forall K\in\{1,2,3,....,n\})$:

$\sqrt{1}\leq\sqrt{K}\leq\sqrt{n}$

يعني $(\forall K\in\{1,2,3,...,n\})\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{K}}\leq1$

إذن $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum_{k=1}^{n}1$

يعني $n.\frac{1}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq n$

يعني $\sqrt{n}\leq u_n\leq n$

إذن $\sqrt{n}\leq u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ولدينا $\lim\sqrt{n}=+\infty$ إذن $\lim u_n=+\infty$

2- نعتبر المتتالية: $U_n=q^n$

* إذا كان $q>1$

نضع $a=q-1$ (مع $a>0$) يعني $q=1+a$

لدينا: $q^n=(1+a)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.1^{n-k}.a^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.a^k$$

$$=C_n^0.a_0+C_n^1.a^1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k.a^k=1+na+\sum_{k=2}^{n}C_n^k.a^k$$

إذن $q^n-(1+na)=\sum_{k=2}^{n}C_n^k a^k\ge 0$

ولدينا $\lim 1+na=+\infty$ إذن $\lim q^n=+\infty$

إذا كان $q=1$:

فإن $\lim q^n=1$

* إذا كان $-1\langle q\langle 1$ مع $q\neq 0$:

$$\lim\left|q^n\right|=\lim|q|^n=\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$$

ولدينا $-1\langle q\langle 1$ يعني $|q|\langle 1$

يعني $\frac{1}{|q|}\rangle 1$ إذن من خلال ما سبق:

$$\lim\frac{1}{|q|^n}=+\infty$$

إذن $\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$

ومنه $\lim q^n=0$

* إذا كان $q\le -1$

نقبل أن (U_n) لا تقبل نهاية.

خاصية:

$$\lim q^n=\begin{cases}+\infty & ; \quad q\rangle 1\\ 1 & ; \quad q=1\\ 0 & ; \quad -1\langle q\langle 1\\ & ; \quad q\le -1\end{cases}$$

3) التقارب والرتابة:

خاصية (1):

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية.

إذا كانت (U_n) متقاربة وموجبة انطلاقا من صف ما فإن: $\lim u_n\ge 0$

استنتاج:

*) لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين

إذا كانت $u_n\le v_n$ انطلاقا من صف ما.

فإن $\lim u_n\le\lim v_n$

ملاحظة:

(u_n) و (v_n) متقاربتان.

إذا كان $u_n\le v_n$ فإن $\lim u_n\le\lim v_n$

$u_n\langle v_n\not\Rightarrow\lim u_n\langle\lim v_n$

مثال: $u_n=\frac{1}{n+1}$, $v_n=\frac{1}{n}$

لدينا: $u_n\langle v_n$

لكن $\begin{cases}\lim u_n=0\\ \lim v_n=0\end{cases}$ $\lim u_n=\lim v_n$

خاصية (2): مقبولة.

+ كل متتالية تزايدية ومكبورة. متقاربة.
+ كل متتالية تناقصية ومصغورة. متقاربة.

حالة خاصة:

*) كل متتالية تناقصية وموجبة. متقاربة.

*) كل متتالية تزايدية وسالبة. متقاربة.

تمرين تطبيقي:

بين أن (U_n) متقاربة في الحالات التالية:

1- $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

2- $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

4- العمليات على المتتاليات المتقاربة.

خاصية:

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين فإن المتتاليات (u_n+v_n) , (u_nv_n) , (αu_n) متقاربة

$$\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n$$

$$\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n$$

$$\lim(\alpha u_n)=\alpha\lim u_n$$

- وإذا كانت $\lim v_n\neq 0$ فإن $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة.

و $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

مثال : نعتبر المتتالية: $u_n=\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

$$\lim u_n=\lim\frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=\lim\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

5) توسيع مفهوم النهاية:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$
l	l'	$l+l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
l	l'	ll'
$l\neq 0$	∞	∞ (الإشارة)
∞	∞	∞
0	∞	شكل غير محدد
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\left(u_n/v_n\right)$
l	$l'\neq 0$	l/l'

$l \neq 0$	0	∞
l	∞	0
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد

VI- المتتاليات المتحادية:

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان إذا وفقط إذا كان:

*) $U_n \leq V_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

*) (U_n) تزايدية و (V_n) تناقصية.

*) $\lim(V_n - U_n) = 0$.

خاصية:

إذا كانت (U_n) و (V_n) متحاديتين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

برهان: لدينا $U_n \leq V_n$

لدينا (U_n) تزايدية إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_0 \leq u_n$

و (V_n) تناقصية إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n \leq v_0$

لدينا إذن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

إذن (U_n) تزايدية ومكبورة ب v_0 إذن متقاربة.

(V_n) تناقصية ومصغورة ب u_0 إذن متقاربة.

ولدينا $\lim(v_n - u_n) = 0$

يعني $\lim v_n - \lim u_n = 0$

أي $\lim v_n = \lim u_n$

إذن (U_n) و (V_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية.

مثال:

نعتبر المتتاليتين: $u_n = \dfrac{n}{1+n}$; $v_n = 1+\dfrac{1}{n!}$

لنبين أن (U_n) و (V_n) متحاديتان.

لدينا:

$$v_n - u_n = 1+\frac{1}{n!}-\frac{n}{1+n}$$
$$=\frac{(1+n)!+(1+n)-n(n!)}{(1+n)!}=\frac{(1+n)n!+(1+n)-n(n!)}{(1+n)!}$$
$$=\frac{n!+n+1}{(1+n)!}\rangle 0$$

إذن $u_n \langle v_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

* لدينا:

$$v_{n+1}-v_n = 1+\frac{1}{(1+n)!}-1-\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)}-1\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{-n}{n+1}\right)\langle 0$$

إذن (V_n) تناقصية.

* لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\rangle 0$$

إذن (U_n) تزايدية.

* لنحسب: $\lim(v_n - u_n)$

لدينا:

$$v_n - u_n = \frac{n!+n+1}{(1+n)!}=\frac{n!}{(1+n)!}+\frac{n+1}{(1+n)!}$$
$$=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n!}$$

ولدينا: $(n-1)! \geq 1$ إذن $n(n-1)! \geq n$

أي $n! \geq n$

يعني $0\langle \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n}$

ولدينا $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

إذن $\lim \dfrac{1}{n!} = 0$

وأيضا $\lim \dfrac{1}{1+n} = 0$

إذن $\lim(v_n - u_n) = 0$

ومنه (U_n) و (V_n) متحاديتان.

VII- المتتاليات الترجعية. $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال:

نعتبر المتتالية: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n} \end{cases}$

لندرس سلوك المتتالية (U_n)

نعتبر الدالة: $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

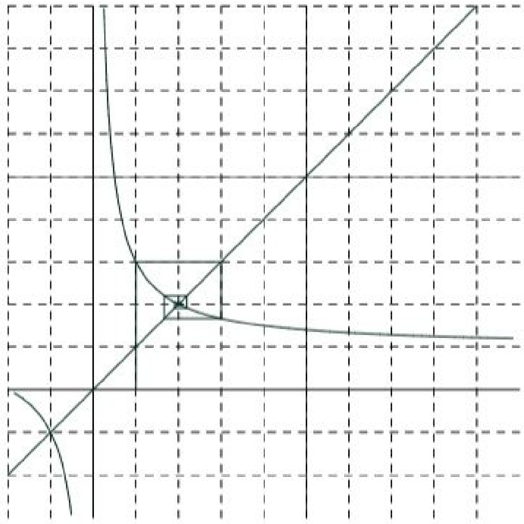
إذن (U_n) تصبح: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

لننشئ ξ_f:

$D_f = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	‖	-
f	↘	‖	↘



من خلال التمثيل المبياني يتبين أن سلوك المتتالية كالتالي:

- (U_n) ليست رتيبة.
- (U_n) مصغورة ب u_0 ومكبورة ب u_1
- (u_2) تؤول إلى 2 الذي هو حل المعادلة $f(x)=x$
- المتتالية: $v_n = u_{2n}$ تزايدية.
- المتتالية: $w_n = u_{2n+1}$ تناقصية.
- $v_n \langle w_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
- $(\ {}_n)$ و (w_n) متحاديتان.

ثم نقوم بالبرهان على هذه النتائج.

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I ونعتبر المتتالية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

إذا كانت f متصلة على I و (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق $f(l)=l$

الاسبوع التاسع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم التفاضل ومشتقة الدوال الجبرية هو فهم كيفية تغير الكميات لحظيا اي كيف تتغير قيمة دالة رياضية بالنسبة لتغيير طفيف جدا في متغيرها

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

التفاضل المشتقة مشتقة الدوال الجبرية

المشتقة Derivative

مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x هي الدالة $f'(x)$ وتعرّف كما يلي :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

قواعد المشتقة :

لتكن كل من $g(x)$, $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق وليكن c ثابت و $n \in \mathbb{R}$ فانّ :

1. $\dfrac{dc}{dx} = 0$
2. $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) \mp g(x)] = f'(x) \mp g'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).g'(x) + g(x).g'(x)$
5. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$
6. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}.f'(x)$

مثال (١) جد مشتقة الدوال التالية :

$$1.\ f(x) = \left(\frac{1+3x}{3x}\right)(3-x)$$

$$2.\ f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$3.\ f(x) = (x^2+2)^5\sqrt{x^2-2x}$$

الحل :

$$1.\ f'(x) = \left(\frac{1+3x}{3x}\right) \times (-1) + (3-x) \times \frac{3x \times 3 - (1+3x) \times 3}{9x^2}$$

$$= \frac{-1-3x}{3x} + \frac{x-3}{3x^2}$$

$$= \frac{-x-3x^2+x-3}{3x^2} = \frac{-(x^2+1)}{x^2}$$

$$2.\ f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-(1+\sqrt{x})\times\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

$$3.\ f'(x)=\frac{(x^2+2)^5\times(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}+\sqrt{x^2-2x}\times 5(x^2+2)^4\times 2x$$

$$=(x^2+2)^4\left(\frac{(x^2+2)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}+10x\sqrt{x^2-2x}\right)$$

$$=\frac{(x^2+2)^4(11x^3-21x^2+2x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

مثال (٢) جد قيمة $f'(3)$ و $f''(3)$ للدالة $f(x)=(9+2x^2)^{5/3}$.

الحل :

$$f'(x)=\frac{5}{3}(9+2x^2)^{2/3}\times 4x$$

$$f'(3)=\frac{5}{3}(9+2(3)^2)^{2/3}\times 4\times 3$$

$$=180$$

$$f'(x)=\frac{20x}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(x)=\frac{20x}{3}\times\frac{2}{3}(9+2x^2)^{-1/3}\times 4x+\frac{20}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(x)=\frac{160x^2}{9(9+2x^2)^{1/3}}+\frac{20}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(3)=\frac{160\times 9}{9(9+2(3)^2)^{1/3}}+\frac{20}{3}(9+2(3)^2)^{2/3}=\frac{340}{3}$$

قاعدة السلسلة Chain rule

اذا كانت $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

مثال (٣) اذا كانت $y = x^2 + \frac{x}{2}$ و $x = 2t - 5$ فجد $\frac{dy}{dt}$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(2x + \frac{1}{2}\right) \times 2$$

$$= 4x + 1$$

$$= 8t - 19$$

مثال (٤) جد $\frac{dy}{dx}$ اذا علمت ان $x = t + \frac{1}{t}$ و $y = t - \frac{1}{t}$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 + 1}{t^2} \times \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$$

مثال (٥) اذا كان $r=\sqrt{s+1}$ و $s=109t^2-2t$ فجد $\dfrac{dr}{dt}$.

الحل:

$$\frac{dr}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{s+1}}$$

$$\frac{ds}{dt}=218t \quad -2$$

$$=2(109t-1)$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\times\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{s+1}}\times 2(109t-1)$$

$$=\frac{109t-1}{\sqrt{109t^2-2t+1}}$$

مثال (٦) جد قيمة $\dfrac{dy}{dx}$ اذا كان $x=\sqrt[3]{2t^2-1}$ و $y=(4t+5)^{3/2}$ عند $t=1$.

الحل :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}(4t+5)^{1/2}\times 4=6\sqrt{4t+5}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=18$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}(2t^2-1)^{-2/3}\times 4t$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=18\times\frac{3}{4}=\frac{27}{2}$$

التطبيق الهندسي للمشتقة

من اهم التطبيقات الهندسية للمشتقة هو إيجاد معادلتي المماس لمنحني الدالة والعمود عليه عند نقطة التماس وهنا نحتاج الى معرفة ميل منحنى الدالة عند نقطة التماس وهو يساوي قيمة المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة .

مثال (٧) جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحني $y = x^3 - 4x + 1$ عند $x = 2$.

الحل:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'(2) = 3(2)^2 - 4 = 8$$

ميل المماس $m_1 = y'(2) = 8$

$$y(2) = (2)^3 - 4(2) + 1 = 1$$

نقطة التماس $(2,1)$

معادلة المماس $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$y - 1 = 8\,(x - 2)$$

$$y - 8x + 15 = 0$$

ميل العمود $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{8}$

معادلة العمود

$$y - 1 = -\frac{1}{8}\,(x - 2)$$

$$8y + x - 10 = 0$$

مثال (٨) جد معادلة المماس والعمود عليه لمنحني الدالة $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$ عند نقطة التماس $(2,2)$.

الحل:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

$$2x - 2xy' - 2y + 2yy' + 2 + y' = 0$$

$$4 - 4y' - 4 + 4y' + 2 + y' = 0$$

$$y' = -2$$

$m = -2$ ميل المماس

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ معادلة المماس

$$y - 2 = -2\,(x - 2)$$

$$y + 2x - 6 = 0$$

ميل العمود $m = 1/2$

معادلة العمود $y - 2 = (1/2)\,(x - 2)$

$$2y - x - 2 = 0$$

مثال (٩) جد معادلة المماس للمنحني $y = (4t)^{\frac{1}{3}}$, $x = t\sqrt{2t+5}$ عند $t = 2$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{2t+5}} + \sqrt{2t+5} \quad at \quad t = 2 \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}(4t)^{-\frac{2}{3}} \times 4 \qquad at \quad t = 2 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{11}$ ميل المماس

$t = 2 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad and \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad (6,2)$ نقطة التماس

$$y - 2 = \frac{1}{11}(x - 6)$$

$$11y - x - 16 = 0$$

تطبيقات فيزيائية للمشتقة (المسافة والسرعة والتعجيل)

اذا تحرك جسم على خط مستقيم وقطع مسافة s بزمن t فان سرعته $v(t)$ هي المشتقة الاولى للمسافة ، وتعجيله $a(t)$ هو المشتقة الثانية للمسافة أو مشتقة السرعة

اي ان :

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

و
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}$$

مثال (١٠) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = \frac{1}{4}t^4 + t^3 - 12t^2$ حيث s الازاحة بالأمتار و t الزمن بالثواني جد:

(١) سرعة و تعجيل الجسم عند $t = 5\ sec$.

(٢) الازاحة عندما يكون التعجيل صفر .

الحل :

$$v = \frac{ds}{dt} = t^3 + 3t^2 - 24t$$

$$v|_{t=5} = (5)^3 + 3(5)^2 - 24 \times 5 = 125 + 75 - 120 = 80\ \ m/sec$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 3t^2 + 6t\ \ - 24$$

$$a|_{t=5} = 3(5)^2 + 6 \times 5 - 24 = 75 + 30 - 24 = 81 \qquad m/sec^2$$

$$a = 3t^2 + 6t\ \ - 24 = 0 \quad \rightarrow t^2 + 2t\ \ - 8 = 0$$

$$(t + 4)(t - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2\ sec$$

$$s|_{t=2} = \frac{1}{4}(2)^4 + (2)^3 - 12(2)^2 = 4 + 8 - 48 = -36\ \ m$$

مثال (١١) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 15t$ حيث s الازاحة بالامتار و t بالثواني جد الازاحة المقطوعة لكي يصل الجسم لحالة السكون .

الحل :

$$\frac{ds}{dt} = t^2 + 2t - 15$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$(t+5)(t-3) = 0$$

$$t = 3 \ sec$$

الازاحة المقطوعة لكي يصل الجسم لحالة السكون هي

$$s = \frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2 - 15(3) = -37 \ m$$

مثال (١٢) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = (t^2 - 2t - 8)^2$ حيث s الازاحة بالامتار و t الزمن بالثواني جد الازاحة عند سكون الجسم .

$$s = (t^2 - 2t - 8)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v = 2(t^2 - 2t - 8)(2t - 2)$$

$$2(t^2 - 2t - 8)(2t - 2) = 0$$

$$4(t-4)(t+2)(t-1) = 0$$

$t = 4 \text{ sec}$

$t = -2$ تهمل

$t = 1 \ sec$

$s|_{t=4} = ((4)^2 - 2(4) - 8)^2 = 0 \ m$

$s|_{t=1} = ((1)^2 - 2(1) - 8)^2 = 81 \ m$

تمارين

جد dy/dx لكل مما يلي

1. $y = x^2\sqrt{2x^2+3}$
2. $x^2y = y^2 + 2xy + 5$
3. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2$
4. $y = 4\,x\,\sqrt{x+\sqrt{x}}$
5. $y = \sqrt{t^2-4}+3$, $\quad x = 3t\sqrt{2t+1}$
6. $y = t - \dfrac{1}{t^2}$, $\quad x = t + \dfrac{1}{t^2}$
7. $y = t\sqrt{t+1}$, $\quad x = \sqrt{2t-3}$
8. $y = s - \sqrt{s}$, $\quad x = s + \sqrt{s}$

جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحنيات ادناه عند النقطة المعطاة :

9. $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$, $\quad x = 1$
10. $x^2 + xy - y^2 = 1,\ x = 2$
11. $y = \sqrt{3t},\quad x = -\sqrt{t+1}$, $\quad t = 3$

12. جسم يتحرك وفق المعادلة $s = (t^2-8)^{2/3}$ حيث s الازاحة بالامتار و t الزمن بالثواني جد سرعة الجسم وتعجيله عند $t = 3\ \mathrm{sec}$.

13. جسم يتحرك وفق المعادلة $s = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$ حيث s الازاحة بالأمتار و t الزمن بالثواني

جد:

(١) سرعة و تعجيل الجسم عند $t = 4\ sec$.

(٢) الازاحة عندما يكون التعجيل صفر .

الاسبوع العاشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم الدوال المنحنية والدوال القياسية هو تمثيل العلاقات غير الخطية في الحياة الواقعية وتحليل السلوك البياني للدوال وحل المعادلات غير الخطية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

الدوال المنحنية الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا

المشتقات The Derivatives

تعريف:

المشتقة للدالة f هي دالة، يرمز لها f' ، بحيث أن قيمتها في كل عدد x في منطلق f معطاة بـــ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة لـ x . وهناك رموز أخرى تستعمل لمشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة الى x ، وهي $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, y' .

قد يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a ، وعندئذ تكون قيمتها $f'(\mathrm{a})$ ويقال أن الدالة قابلة الأشتقاق differentiable في a ، كما قد يحدث خلاف ذلك، أي قد لا يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في a لعدم وجود الغاية، وفي هذه الحالة يقال أن الدالة غير قابلة الأشتقاق في a .

ويقال أن الدالة $f(x)$ قابلة الأشتقاق في الفترة I أذا كانت قابلة الأشتقاق في كل عدد x في I وقد تكون الدالة قابلة الأشتقاق في كل نقاط منطلقها.

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x بأستعمال التعريف نتبع الخطوات الاتية:

1) نحسب $f(x + \Delta x)$

2) نحسب الفرق $f(x + \Delta x) - f(x)$

3) نحسب المقدار $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ نحسب الغاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مثال: جد مشتقة الدالة بأستعمال التعريف

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

ثم أستعمل النتيجة لأيجاد قيمة المشتقة في $x = 3$ (أي أيجاد $f'(3)$) .

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2$$

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - (x^2 + 3x - 2)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - x^2 - 3x + 2$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3) = 2x + 0 + 3$$

$$= 2x + 3$$

لذلك، فأن هذه الدالة قابلة الأشتقاق في $\mathbb{R}$.

قيمة المشتقة في $x = 3$ ، هي

$$f'(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9.$$

ملاحظة: يرمز ، في بعض الأحيان، لقيمة المشتقة للدالة $f(x)$ في $x = \mathrm{a}$ بالرمز

$$f'(x)|_{x=\mathrm{a}}$$

مثال: لتكن $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ ، حيث أن a , b ثابتان (أي $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$). جد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) = \mathrm{a}\,(x + \Delta x) + \mathrm{b} = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b} - (\mathrm{a}x + \mathrm{b}) = \mathrm{a}\,\Delta x$$

لذلك، فأن

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{a}\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{a} = \mathrm{a}.$$

مثال: لتكن $f(x)=\sqrt{x}$ ، حيث $x \geq 0$. جد $f'(x)$ عندما $x > 0$.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

ولأجل حساب هذه الغاية نضرب البسط والمقام في مرافق البسط، الذي هو $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{x+\Delta x+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}-x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x+0}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بشرط $x > 0$. لاحظ أن المشتقة غير موجودة عندما $x=0$.

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{x-2}$ وبين أنه لا توجد مشتقة عندما $x=2$.

الحل:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$=\frac{x-2-x-\Delta x+2}{(x+\Delta x-2)(x-2)}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

وهكذا، يكون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot (x+\Delta x-2)(x-2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

واضح أن $f'(x)$ موجودة لكل قيم x الحقيقية ما عدا $x = 2$.

مبرهنة: أذا كانت f دالة قابلة الأشتقاق في a ، فأن f مستمرة في a .

المثال الاتي يبين أن عكس هذه المبرهنة غير صحيح دائماً، أي قد تكون الدالة f مستمرة في العدد a ولكن مشتقتها في a غير موجودة.

مثال: تأمل دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$. هذه الدالة مستمرة في $x = 0$ وقيمتها تساوي صفراً، ولكن مشتقتها عند هذه النقطة غير موجودة، كما مبين في الاتي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

لذلك، فأن

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

فأذا كانت $\Delta x > 0$ ، فأن $f'(0) = 1$ ، وأذا كانت $\Delta x < 0$ ، فأن $f'(0) = -1$. لذلك فأن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى عندما $\Delta x \to 0$. وعليه، فأن هذه الغاية غير موجودة، أي $f'(0)$ ، غير موجودة.

بعض قوانين الأشتقاق

يطلق على عملية أيجاد مشتقة دالة ما التفاضل differentiation ، ولكن عملية التفاضل هذه مطولة ومملة وخاصة عندما تكون الدالة معقدة. لذلك وجب وضع قواعد وقوانين تسهل أجراء عملية التفاضل.

مبرهنة: أذا كان $f(x) = \mathrm{c}$ لكل x ، حيث c ثابت حقيقي، فأن $f'(x) = 0$. أي مشتقة الثابت تساوي صفراً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 7$ ، فأن $f'(x) = 0$ وأذا كانت $f(x) = -5$ ، فأن $f'(x) = 0$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ ، فأن $f'(x) = \mathrm{n}\, x^{\mathrm{n}-1}$.

مثال: اذا كانت $f(x) = x^3$ ، فأن $f'(x) = 3x^2$ وأذا كانت $f(x) = x^5$ ، فأن $f'(x) = 5x^4$

مبرهنة: أذا كان c ثابتاً وكانت f دالة قابلة الأشتقاق، فأن $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c} \cdot f(x)] = \mathrm{c}\, f'(x)$.

مثال: اذا كانت $f(x) = 3x^6$ ، فأن $f'(x) = 3(6)\, x^5 = 18\, x^5$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\, f(x) \pm \mathrm{g}(x)\,] = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

ويمكن أن نكتب قاعدة الاشتقاق المتضمنة في هذه المبرهنة كالاتي:

$$(f \pm \mathrm{g})'(x) = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

أذا كانت

$$f(x) = \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-1} + \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-2} + \cdots \mathrm{a_1}\, x + \mathrm{a_0}$$

متعددة حدود، فأن

$$f'(x) = \mathrm{n}\, \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}-1} + (\mathrm{n}-1)\, \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-2} + (\mathrm{n}-2)\, \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-3} + \cdots + \mathrm{a_1}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x - 4$ ، فأن

$$f'(x) = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{d}{dx}[\, f(x) \cdot g(x)\,] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

or

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

مثال: أذا كانت $f(x) = (3x - 2) \cdot (4x + 1)$ ، فأن

$$f'(x) = (3x - 2) \cdot (4) + (4x + 1) \cdot (3) = 12x - 8 + 12x + 3$$

$$= 24x - 5$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، وأن $g(x) \neq 0$ ، فأن

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = \frac{8\,x^7}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$f'(x) = \frac{(2x - 1) \cdot (56\,x^6) - (8\,x^7) \cdot (2)}{(2x - 1)^2} = \frac{112\,x^7 - 56\,x^6 - 16\,x^7}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{96\,x^7 - 56\,x^6}{(2x-1)^2}$$

مثال: لتكن

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 9}\ ,\ x \neq 9$$

فأن

$$f'(x) = \frac{(x - 9) \cdot (2\,x - 2) - (x^2 - 2x + 5) \cdot (1)}{(x - 9)^2}$$

$$= \frac{2\,x^2 + 18 - 18\,x - 2x - x^2 + 2x - 5}{(2x - 1)^2} = \frac{x^2 - 18\,x + 13}{(2x - 1)^2}$$

مثال: لتكن $g(t) = \frac{t^2}{t^2-4}$ ، أوجد قيمة $\frac{dg}{dt}$ عندما $t = 0$ ، $t = 1$.

الحل:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{(t^2-4)\cdot(2\,t)-(t^2)\cdot(2\,t)}{(t^2-4)^2} = \frac{2\,t^3-8\,t-2\,t^3}{(t^2-4)^2} = \frac{-8\,t}{(t^2-4)^2}$$

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \quad , \quad \frac{dg}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{-8}{9}$$

مثال: لتكن $y = f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{(2x-1)\cdot(0)-(1)\cdot(2)}{(2x-1)^2} = \frac{0-2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{-n}$ ، فأن $f'(x) = -n\,x^{-n-1}$

مثال: أذا كانت $f(x) = x^5 - 3x^{-2} + 2x^{-3} + 1$ ، فأن

$$f'(x) = 5x^4 - 3(-2)x^{-2-1} + 2(-3)x^{-3-1} + 0 = 5x^4 + 6\,x^{-3} - 6\,x^{-4}$$

يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل الحالات التي يكون فيها الأس عدداً نسبياً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ ، أي أن $f(x) = 5\,(x)^{\frac{1}{3}}$ ، فأن

$$f'(x) = 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}\,(x)^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

مبرهنة: أذا كانت $y = [\,f(x)\,]^n$ ، حيث أن n عدد صحيح وأن $f(x)$ دالة قابلة للأشتقاق، فأن

$$\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

مثال: لتكن $y = 2\,(3\,x^2 + 5)^4 - 3\,(x^2 + 3x - 2)^{-5}$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(4)(3\,x^2 + 5)^3 \cdot (6\,x) - 3(-5)(x^2 + 3x - 2)^{-6} \cdot (2\,x + 3)$$

$$= 48\,x\,(3\,x^2 + 5)^3 + 15\,(x^2 + 3x - 2)^{-6} \cdot (2\,x + 3)$$

مثال: لتكن $y = 4\,(2\,x^2 + 3\,x - 2)^2$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,(2)(2\,x^2 + 3\,x - 2)^{2-1} \cdot (4\,x + 3)$$
$$= 8\,(2\,x^2 + 3\,x - 2) \cdot (4\,x + 3)$$

مشتقة الدالة المركبة . قاعدة السلسلة The Chain Rule

مبرهنة: لتكن $y = f(\mathrm{u})$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى u ، ولتكن $\mathrm{u} = \mathrm{g}(x)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن الدالة المركبة $y = (f \circ \mathrm{g})(x)$ قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x وأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ أذا كانت $y = (\,x^2 + 5\,x - 3)^6$.

الحل: نفرض أن $\mathrm{u} = x^2 + 5\,x - 3$ ، عندئذ تكون $y = \mathrm{u}^6$. ومنها نحصل على

$$\frac{du}{dx} = 2x + 5 \qquad , \qquad \frac{dy}{du} = 6\,\mathrm{u}^5$$

وبموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6\,\mathrm{u}^5 \cdot (2x + 5) = 6(x^2 + 5\,x - 3)^5 \cdot (2x + 5)$$

مثال: أذا كانت $\mathrm{u} = x + 3 \quad , \quad y = \mathrm{u}^2 + 5\mathrm{u} - 1$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2\mathrm{u} + 5) \cdot (1) = 2\,\mathrm{u} + 5$$

بما أن $\mathrm{u} = x + 3$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\mathrm{u} + 5 = 2(x + 3) + 5 = 2x + 6 + 5 = 2x + 11$$

مثال: أذا كانت $u = 5x^2 \quad , \quad y = u^3 + 2u + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x)$$

بما أن $u = 5x^2$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x) = (3\,(5x^2)^2 + 2) \cdot (10\,x)$$
$$= (75\,x^4 + 2) \cdot (10\,x) = (75x^4 + 2) \cdot (10\,x) = 750\,x^5 + 20\,x$$

مثال: أذا كانت $u = \frac{1}{x+1} \quad , \quad y = 4u^2 + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: أذا كانت $u = 4\,x^2 - 2\,x + 5 \quad , \quad y = u^3$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الدوال الضمنية Implicit Functions

قد تصادفنا في بعض الأحيان علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر مثل

$$x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 3y^3x^2 + 6yx - 5x^2 = 10$$

في مثل هذه المعادلات يصعب أو يتعذر التعبير عن أحد المتغيرات بدلالة الأخر مباشرة، وحتى في حالة أيجاد أحد المتغيرين، مثل y ، بدلالة x ، فأن ذلك يؤدي الى أكثر من دالة واحدة. فأذا أخذنا المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ نجد منها $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ ، وهذه علاقة مكونة من دالتين هما $y = -\sqrt{9 - x^2} \quad , \quad y = \sqrt{9 - x^2}$. ولهذا السبب يطلق على هذه العلاقات دوال ضمنية، لكونها تتضمن دالة واحدة على الأقل ولذلك عند أيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية نعتبر y دالة لــ x ، ونطبق قواعد الأشتقاق المناسبة.

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $x^3 + 4\,y^3 - x\,y^2 + 7\,x = 10$

الحل: نعتبر y دالة للمتغير x ونأخذ المشتقة لكل حد من الحدود بتطبيق القواعد

$$3x^2 + 12\,y^2\frac{dy}{dx} - \left(2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 7 = 0$$

ثم نجمع الحدود المحتوية على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ في طرف واحد، وننقل الحدود الأخرى الى الطرف الثاني.

$$(12\,y^2 - 2\,x\,y)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2 - 7$$

اذاً، $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12\,y^2 - 2\,x\,y}$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $4x^2 + 3xy - xy^2 = 0$

الحل: كما في المثال السابق،

$$8x + 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - \left(x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2\right) = 0$$

$$8x + 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$(3x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3y - 8x}{3x - 2xy}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $2y + \sqrt{xy} = 3x^3$

الحل:

$$2y + (xy)^{1/2} = 3x^3 \Longrightarrow 2y + x^{1/2}\cdot y^{1/2} = 3x^3$$

$$2\frac{dy}{dx} + x^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}\frac{dy}{dx}\right) + y^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right) = 9x^{3-1}$$

$$2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2} = 9x^2$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}\right)\frac{dy}{dx} = 9x^2 - \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2}}{2 + \frac{1}{2}x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{9x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{9x^2 - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $xy = 1$

الحل:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} = -y \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

بما أن $y = \frac{1}{x}$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} = \frac{\frac{-1}{x}}{x} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$x\,y^3 - 3\,x^2 = x\,y + 5$$
$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 0$$
$$4\,x^2 + 9\,y^2 - 36 = 0$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$$

المشتقات من المراتب العليا Derivatives of Higher Orders

المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ مشتقة المشتقة الأولى $f'(x)$. ويرمز عادة للمشتقة الثانية للدالة $y = f(x)$ بأحد الرموز الاتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad f''(x) \quad , \quad y''$$

وبذلك، فأن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وبالمثل، نعرف المشتقة الثالثة (أن وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية. وهكذا، بالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة، الخامسة، ... الخ.

لتكن $y = f(x)$ ولنفرض أن f قابلة للأشتقاق n من المرات في المجال $I \subset \mathbb{R}$ ، فيكون لدينا التعريفات الاتية:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(f'(x))}{dx} = f''(x)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(f''(x))}{dx} = f'''(x)$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d(f'''(x))}{dx} = f^{(4)}(x)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx} = f^{(n)}(x)$$

مثال: جد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5\,x^3 - 4\,x + 1$

الحل:

المشتقة الاولى $y' = 4\,x^3 + 15\,x^2 - 4$

المشتقة الثانية $y'' = 12\,x^2 + 30\,x$

المشتقة الثالثة $y''' = 24\,x + 30$

مثال: جد y''' للدالة $y = 6x^5$

الحل:

$$y' = 30\,x^4 \quad , \quad y'' = 120\,x^3 \quad , \quad y''' = 360\,x^2$$

مثال: جد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

$$y' = 10\,x^4 + 9\,x^2 + 5 \qquad , \qquad y'' = 40\,x^3 + 18\,x$$

$$y''' = 120\,x^2 + 18 \qquad , \qquad y^{(4)} = 240\,x$$

$$y^{(5)} = 240 \qquad , \qquad y^{(6)} = 0$$

مثال: جد قيمة y'' للدالة الضمنية $x^2\,y + 3y = 4$ في النقطة $(-1,1)$ الواقعة على منحني الدالة.

الحل: نوجد المشتقة الأولى بالاشتقاق الضمني:

$$x^2\,y' + y\,(2x) + 3\,y' = 0 \;\Rightarrow x^2\,y' + 2\,x\,y + 3\,y' = 0$$

نوجد المشتقة الثانية

$$x^2\,y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

لأيجاد قيمة y'' في النقطة $(-1,1)$ ، أي عندما $x = -1$, $y = 1$ ، نحتاج أولاً أيجاد قيمة y' في هذه النقطة، وقيمة y' نحصل عليها من العلاقة الأولى وكالاتي:

$$(-1)^2\,y' + 2\,(-1)\cdot(1) + 3\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' + 3\,y' = 2 \Rightarrow 4\,y' = 2$$

$$y' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

والان نعوض هذه القيم في العلاقة الثانية (أي في المشتقة الثانية)

$$x^2\, y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

$$(-1)^2\, y'' + \frac{1}{2}\big(2\,(-1)\big) + 2\left((-1)\,\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + 3\,y'' = 0$$

$$y'' - 1 + 1 + 3\,y'' = 0 \;\Longrightarrow\; y'' + 3\,y'' = 0 \;\Longrightarrow\; 4\,y'' = 0 \Longrightarrow y'' = 0$$

مبرهنة رول **Rolle's Theorem**

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة الأشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فأذا كان $f(a) = f(b)$ ، فأنه يوجد على الاقل عدد واحد c في الفترة المفتوحة (a, b) بحيث أن $f'(c) = 0$.

مثال: لتكن $f(x) = x^3 - 4\,x + 2$ ، فان

$$f'(x) = 3\,x^2 - 4$$

وهي موجودة لكل قيم x الحقيقية، أي أن f قابلة الأشتقاق ومستمرة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن

$$f(-2) = f(2) = f(0) = 2$$

ومن جهة أخرى، نجد أن

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3\,x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

وبموجب مبرهنة رول يجب أن يكون هنالك $c_1 \in (-2, 0)$, $c_2 \in (0, 2)$ بحيث أن

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

ولما كان

$$-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \qquad , \qquad 0 < \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$$

فأن

$$c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad , \qquad c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

الاسبوع الحادي عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم مشتقة الدوال المثلثية واللوغاريتمية هو خطوة متقدمة في حساب التفاضل ويخدم في فهم كيفية تغير هذه الدوال اللحظي في الفيزياء والهندسة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

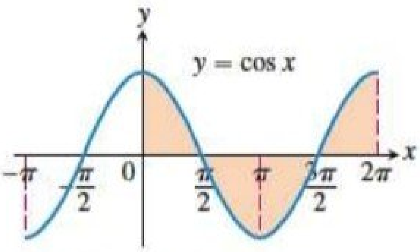
أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

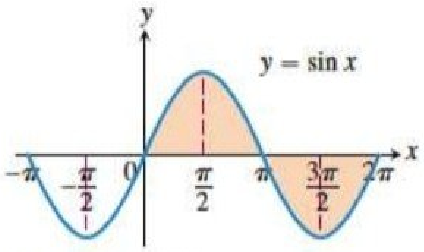
عنوان المحاضرة

مشتقة الدوال المثلثية والدوال اللوغارتيمة

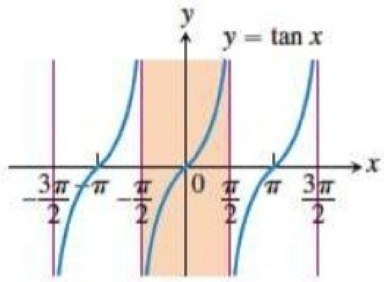
Trigonometric functions الدوال المثلثية



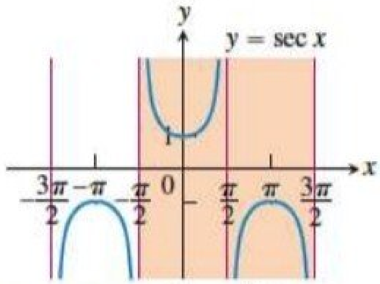
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(a)



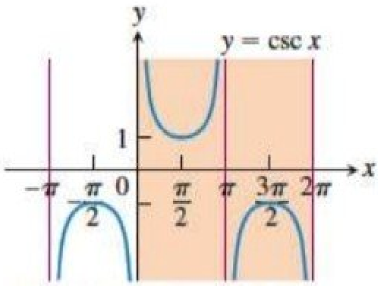
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(b)



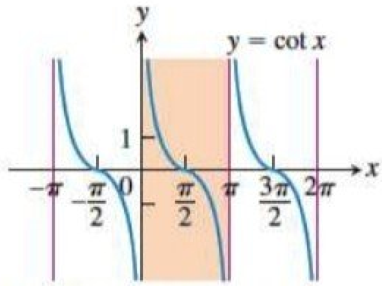
Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(c)



Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(d)



Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(e)



Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(f)

متطابقات مثلثية :

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$ 2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$ 4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

6. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Period π: $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Period 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$
$\csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\cos(-x) = \cos x$
$\sec(-x) = \sec x$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\csc(-x) = -\csc x$
$\cot(-x) = -\cot x$

مشتقات الدوال المثلثية :

$$1.\ \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \,.\frac{du}{dx} \qquad 2.\ \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \,.\frac{du}{dx}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u.\frac{du}{dx} \qquad 4.\ \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u.\frac{du}{dx}$$

$$5.\ \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \,.\frac{du}{dx} \qquad 6.\ \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \,.\frac{du}{dx}$$

مثال (٦) جد y' (dy/dx) للدوال التالية :

$$1.\ y = \sin^3\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3} \qquad 2.\ y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

$$3.\ y = \tan^2(\cos x) \qquad 4.\ y = \tan t \ , \quad x = \sec t$$

الحل :

$$1.\ y' = 3\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} \times \frac{1}{3} - 3\cos\frac{x}{3} \times \frac{1}{3} = \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}$$

$$= \cos\frac{x}{3}\left(\sin^2\frac{x}{3} - 1\right) = -\cos^3\frac{x}{3}$$

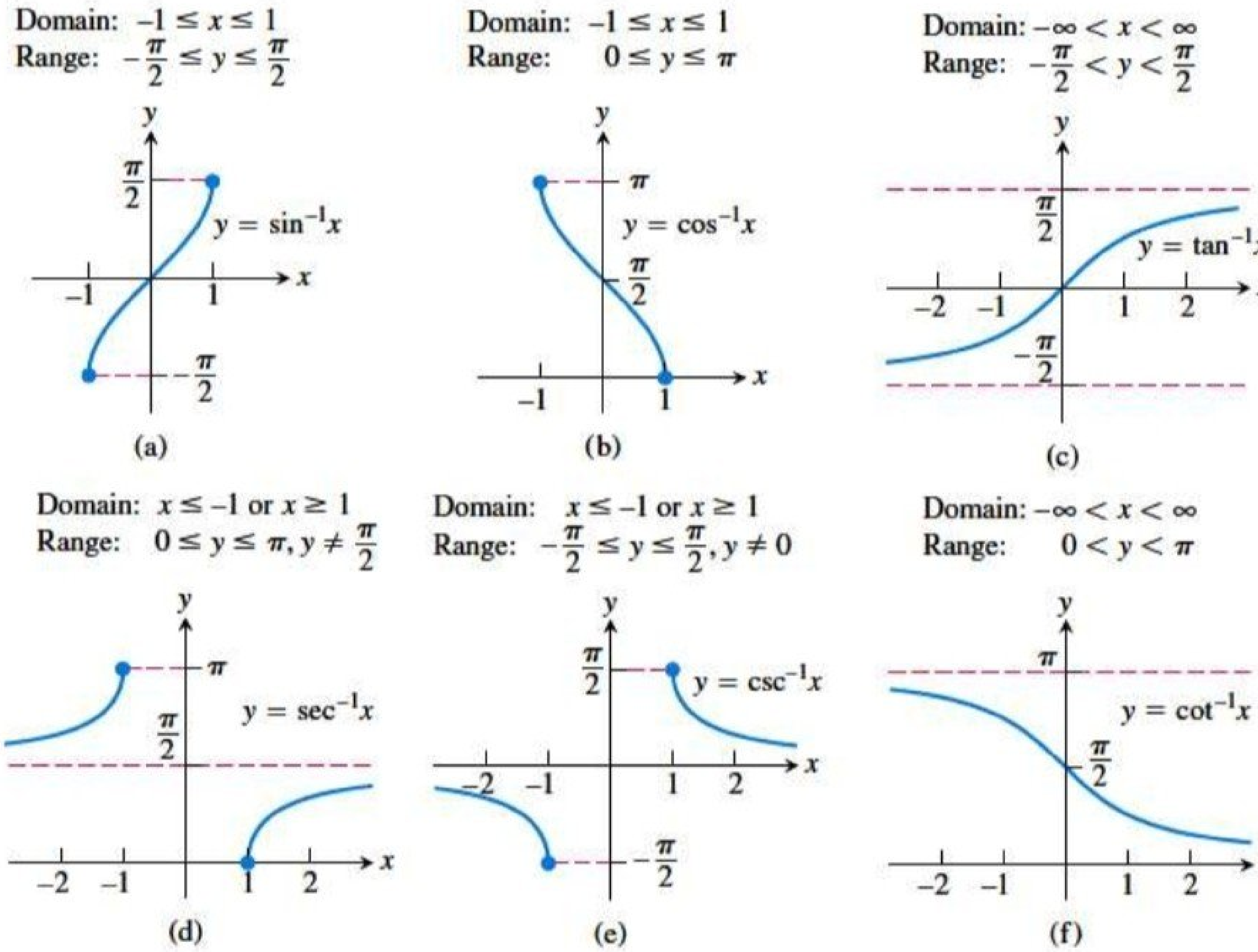
$$2.\ y' = x^2\cos x + 2x\sin x - 2x\sin x + 2\sin x - 2\sin x = x^2\cos x$$

$$3.\ y' = -2\tan(\cos x)\sec^2(\cos x)\sin x$$

$$4.\ \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1/\cos t}{\sin t/\cos t} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

Inverse trigonometric functions الدوال المثلثية العكسية



بعض الخصائص :

1. $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$
2. $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$
3. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$
4. $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
5. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
6. $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$
7. $\csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$

مثال (٧) جد y' للدوال التالية :

1. $y=\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$

2. $y=x\ \sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

3. $y=\sqrt{x^2-1}-\sec^{-1}x$

4. $y=x\cos^{-1}2x-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

الحل :

$$1.\ y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\times\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}\times\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$2.\ y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$$

$$3.\ y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

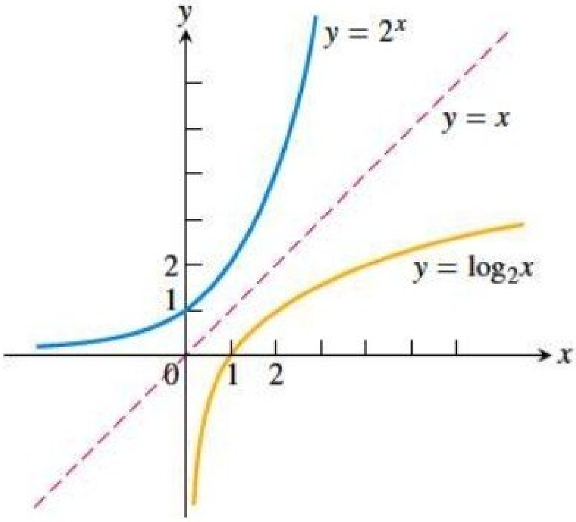
$$4.\ y'=\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}+\cos^{-1}2x-\frac{-8x}{4\sqrt{1-4x^2}}=\cos^{-1}2x$$

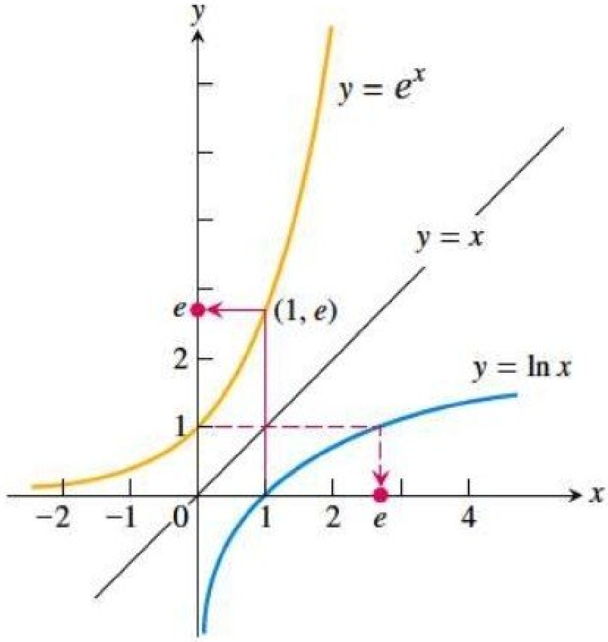
تمارين

جد y' للدوال التالية

1. $y=x(\sin^{-1}x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x$
2. $y=\csc^{-1}(x^2+1)$
3. $y=\cot^{-1}(1/x)+\tan^{-1}x$
4. $y=\csc^{-1}(\sec x)$
5. $y=1-\sin t\ \ ,x=t-\sin t$
6. $y=\tan t\ \ ,x=\sec^2 t-1$
7. $y=\sin(\cos(2x-1))$
8. $y=\sqrt{1-\cos(x^2)}$

الدالة اللوغاريتمية $\log_a x$ والدالة الاسية a^x Logarithm function & Exponential function





قواعد اللوغاريتمات

$1. \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ $2. \log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$

$3. \log_a x^n = n \log_a x$ $\qquad$ $4. \log_a a = 1$

$5. \log_a a^x = x$ $\qquad$ $6. \log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$

منطلق ومدى الدالة اللوغاريتمية :

اذا كان $y = \log_a u$ و $u = u(x)$ فان $Domain = \{u | u > 0\}$ و $Range : -\infty < y < \infty$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

$$* \ \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \cdot \frac{du}{dx} \qquad ** \ \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

قواعد الأسس

$1. a^{x+y} = a^x . a^y$ $\qquad$ $2. a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\qquad$ $3. (a^x)^y = a^{x.y}$ $\qquad$ $4. a^u = e^{u \ln a}$

مشتقة الدالة الأسية :

$$* \ \frac{d}{dx} a^u = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a \qquad ** \ \frac{d}{dx} e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

منطلق ومدى الدالة الأسية :

اذا كان $y = a^u$ و $u = u(x)$ فان $Domain : -\infty < u < \infty$ و $Range : \{y | y > 0\}$

العلاقة بين الدالة الاسية اللوغاريتمية

$$y = \log_a x \qquad \leftrightarrow \qquad x = a^y$$

مثال (٨) جد منطلق الدوال التالية :

$1. y = \log_5(3 - x^2)$ $\qquad$ $2. y = \log(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

الحل

$1.\quad 3 - x^2 > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 3 < 0 \;\rightarrow\; D = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$2.\; x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \;\rightarrow\; x^3 - x - 2x^2 + 2 > 0 \rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) > 0$

$(x^2 - 1)(x - 1) > 0 \;\rightarrow\; (x - 1)(x + 1)(x - 2) > 0$

النقاط الحدودية هي $x = 1, -1, 2$

الفترة	قيمة x داخل الفترة	قيمة $x^3 - 2x^2 - x + 2$	اشارة $x^3 - 2x^2 - x + 2$
$(-\infty, -1]$	-2	-12	سالبة
$(-1,1)$	0	2	موجبة
$(1,2)$	1.5	-0.625	سالبة
$(2, \infty)$	3	8	موجبة

$D = (-1,1) \cup (2, \infty)$

مثال (٩) جد قيمة x لكل ما يلي :

$1.\quad -8 = \log 2x$ $\qquad$ $2.\quad \log(3x - 5) = 2$

الحل

$1.\quad 2x = 10^{-8} \;\rightarrow\; x = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

$2.\quad 3x - 5 = 10^2 \;\rightarrow 3x = 100 + 5 \;\rightarrow\; x = 35$

مثال (١٠) جد y' للدوال التالية :

$1.\; y = x^3 \ln 2x$ $\qquad$ $2. y = \tan^{-1}(e^x)$ $\qquad$ $3. y = \ln(x^2 + 4) - x \tan^{-1}\frac{x}{2}$

$4. y = \log_5(x^2 + 5x)$

الحل

$$1.\quad y' = \frac{x^3 \times 2}{2x} + 3x^2 \times \ln 2x = x^2 + 3x^2 \ln 2x = x^2(1 + 3\ln 2x)$$

$$2.\quad y' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$3.\quad y' = \frac{2x}{x^2 + 4} - \left(\frac{x \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{x}{2} \right) = \frac{2x}{x^2 + 4} - \frac{2x}{4 + x^2} - \tan^{-1}\frac{x}{2} = -\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$4.\quad y' = \frac{2x + 5}{(x^2 + 5x)\ln 5}$$

تمارين

جد قيمة x لكل ما يلي :

1. $\log(3x-1)=-3$
2. $\log(7x-12)=2$

جد منطلق الدوال التالية :

3. $y=\log(x^3-4x)$
4. $y=\log\left(\sqrt{x^2-4}\right)$

جد y' للدوال التالية :

5. $y=\ln(x^2+x)$
6. $y=\ln(\ln x)$
7. $y=e^{\sin^{-1}x}$
8. $y=2^{\sec x}$
9. $y=x\sin(\log_7 x)$
10. $y=x\tan^{-1}x-\ln\sqrt{x}$
11. $y=(x^2+1)\tan^{-1}x$

الاسبوع الثاني عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم مشتقات الدوال الاسية والزائدية هو فهم كيفية تغير هذه الدوال وتطبيقاتها في مختلف المجالات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

مشتقة الدوال الاسية والزائدية

الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية ذات الأساس a تكتب بالصيغة

$$f(x) = \mathrm{a}^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر ($\mathrm{a} > 0$).

المجال (أو المنطلق) للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$$f(x) = 4^x \quad , \quad f(x) = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

بعض خصائص الدالة الاسية:

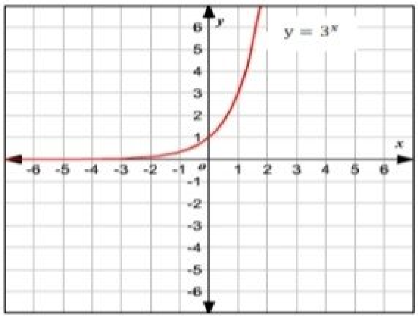
- $\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$
- $\mathrm{a}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \left(\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\right)^{\mathrm{m}} = \left(\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{m}}$
- أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فان $\mathrm{a}^x > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $\mathrm{a}^{x+\mathrm{y}} = \mathrm{a}^x \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$
- $\mathrm{a}^{x-\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}^x}{\mathrm{a}^{\mathrm{y}}}$
- $\mathrm{a}^0 = 1$
- أذا كان $\mathrm{a} > 1$ ، فان a^x دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ ، فان a^x دالة متناقصة.
- a^x دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $\mathrm{a} = 1$ ، فان $\mathrm{a}^x = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 3^x \quad , \quad \mathrm{g}(x) = 2^{-x} \quad , \quad \mathrm{h}(x) = 5^{-x} \quad , \quad \mathrm{u}(x) = 4^x$$

الحل: الدالة $f(x) = 3^x$

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty) \quad , \quad \mathrm{R}_f = (0, \infty)$$

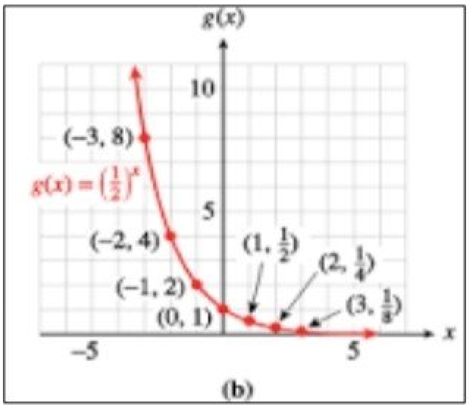


x	-4	-2	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty,\infty)$.

أما الدالة $g(x) = 2^{-x}$

$$D_g = (-\infty,\infty) \qquad , \qquad R_g = (0,\infty)$$



x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty,\infty)$.

تفاضل وتكامل الدالة الاسية

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad , \quad a > 0\,, a \neq 1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $\quad y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2 \cdot (6x+4)$$
$$= (48x+32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $\quad y = x^2\, 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\, 3^x (x\ \ln 3 + 2)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $\quad y = 4^{t^4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot \ln 4 \cdot (4t^3)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $\quad y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل:

$$y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot \ln 2 \cdot (2 + 2t)$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2\ (7^{2x+3})\ dx = \frac{1}{2}\ \frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x} dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right) dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\} dx$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)} \right\}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} - 1}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5} - 1}{\ln(4/5)}$$

$$= \frac{-2/5}{\ln(3/5)} + \frac{-1/5}{\ln(4/5)} .$$

Natural Exponential Function $\quad y = e^x \quad$ الدالة الاسية الطبيعية

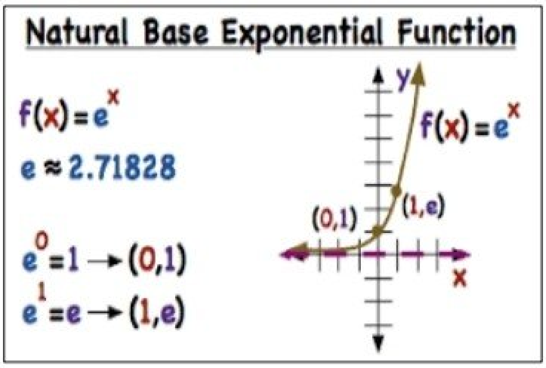
يعرف العدد e كالاتي:

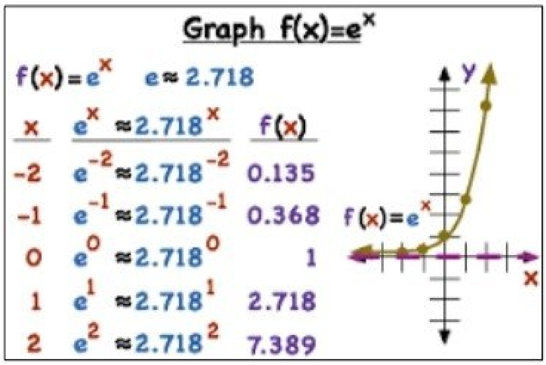
$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$$e = 2.718281828459045 \ldots$$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y = e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.





تفاضل الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $\quad y = e^{-x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-2x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{3x} \sin(2x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot (2\cos(2x)) + \sin(2x) \cdot (3e^{3x})$$
$$= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = -5\, e^{\sin x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\, e^{\sin x} \cdot (\cos x) = -5 \cos x \cdot e^{\sin x}$$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\, e^{x^2}\, dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^x+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بـــ e^{-x} فنحصل على

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1 + e^{-x}} = -\ln(1 + e^{-x}) + C$$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

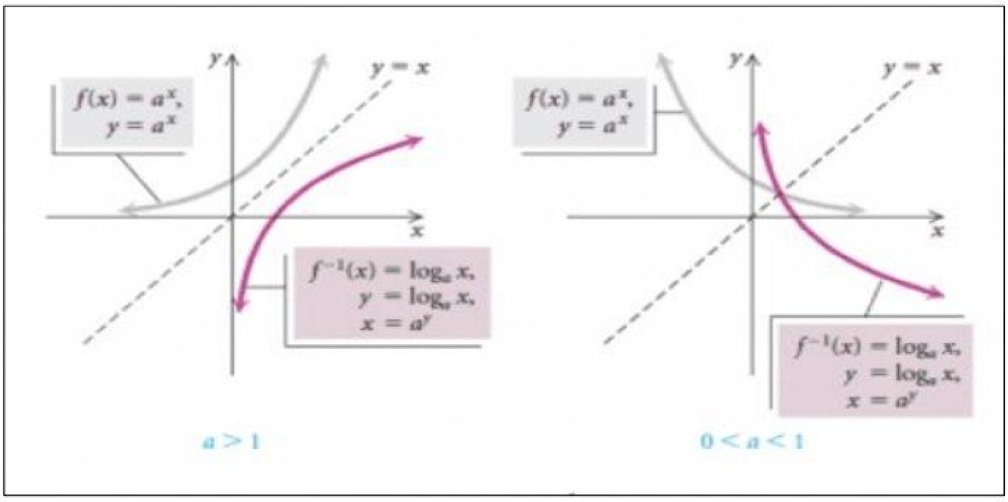
يطلق على معكوس $f(x) = a^x$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بـــ $\log_a x$. هذا يعني أنه اذا كانت

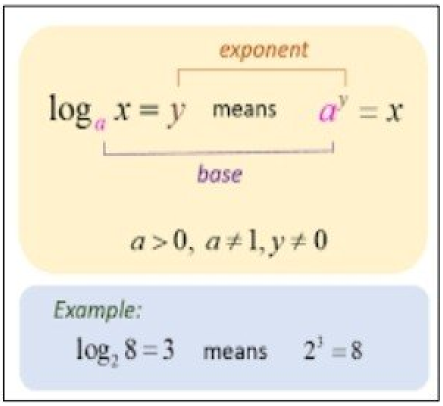
$$f(x) = a^x \ , \ a > 0 , \quad a \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

كما يظهر التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. منطلق دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.





الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a > 0$ و $a \neq 1$ و x, y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3) $\log_a(1) = 0$
4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
5) $\log_a(a) = 1$
6) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ where $r \in \mathbb{R}$
7) $a^{\log_a(x)} = x$
8) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$
9) $\log_a(a^x) = x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$$\log_3(81) \quad , \quad \log_5(\sqrt{5}) \quad , \quad \log_7\left(\frac{1}{49}\right) \quad , \quad \log_2(2)$$

$$\log_8(512) \quad , \quad \log_4(4^{3.2}) \quad , \quad \log_2\left(\frac{1}{32}\right) \quad , \quad \log_{16}(\sqrt{2})$$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81) = y$

نكتب بصيغة اسية $3^y = 81$

$3^y = 3^4$

خاصية المساواة في الأسس $y = 4$

ولهذا فأن $\log_3(81) = 4$

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5}) = y$

نكتب بصيغة اسية $5^y = \sqrt{5}$

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$

خاصية المساواة في الأسس $y = \frac{1}{2}$

ولهذا فأن $\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

تفاضل الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $y = \log_a(u)$ حيث $a \neq 1 , a > 0$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

فأن:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 - 5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2+4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2+4}\cdot\frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3\sqrt{x^2+1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f\circ g)_{(x)}$ ، $(g\circ f)_{(x)}$

$$(f\circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g\circ f)_{(x)} = g\big(f(x)\big) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x\cdot\log_a(a) = x\cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

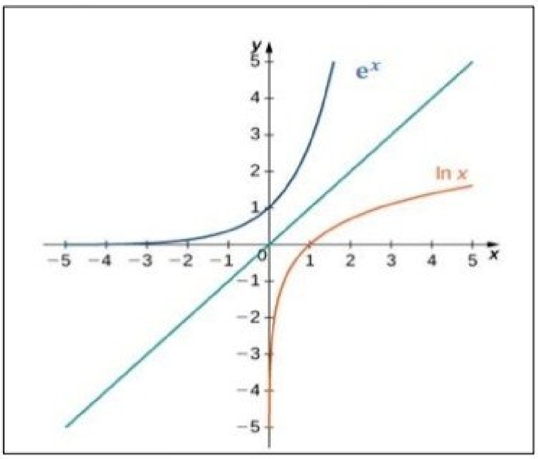
دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

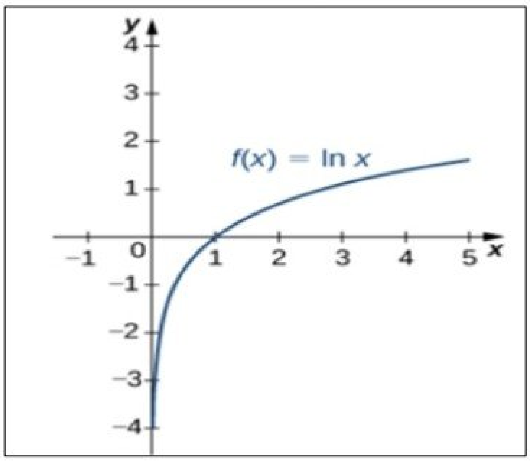
أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $x = 10^y$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0 \quad\text{and}\quad \ln(e^x) = x \text{ for all } x}$$





أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. وأن

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

وأستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln\frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

تفاضل اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x\cdot 0 - 1\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7\ln(4x)$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \csc x\cdot\sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x+1))^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\ln(3x+1))^{1/2}\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

الاسبوع الثالث عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة تطبيقات المشتقة وبالاخص ايجاد معادلة المماس هو فهم كيفية تغير الدالة عند نقطة معينة مما يمكننا من تحليل سلوك المنحنيات وتحديد ملامحها الهندسية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

تطبيقات المشتقة ايجاد معادلة المماس

تطبيقات على المشتقات

الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing and Decreasing Functions

تعريف:

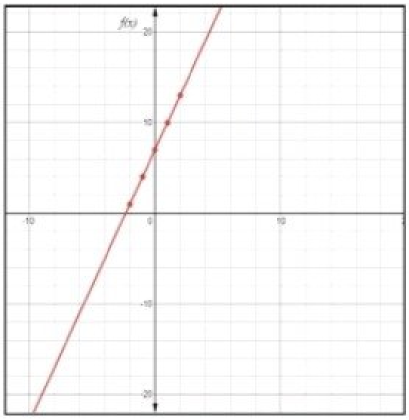
يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها متزايدة increasing على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،

If $x_1 \leq x_2$ then $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall$ $x_1, x_2 \in [a, b]$

مثال: الدالة $f(x) = 3x + 7$ متزايدة في $\mathbb{R}$. لاحظ مخطط الدالة.

$D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
-2	1
-1	4
0	7
1	10
2	13



مثال: أفرض أن $f(x) = x^3$. أذا كان x_1 ، x_2 أي عددين حقيقيين بحيث $x_1 < x_2$ ، فأن $x_1^3 < x_2^3$ ، أي، $f(x_1) < f(x_2)$. وعليه فأن هذه الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

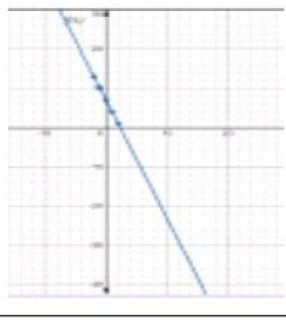
تعريف:

يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها متناقصة decreasing على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،

If $x_1 \leq x_2$ then $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall$ $x_1, x_2 \in [a, b]$

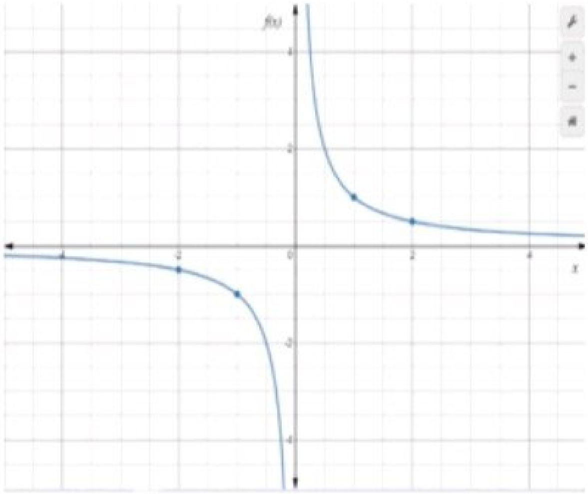
مثال: الدالة $f(x) = 7 - 3x$ متناقصة في $\mathbb{R}$. لاحظ مخطط الدالة.

x	$f(x)$
-2	13
-1	10
0	7
1	4
2	1



مثال: لتكن $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$. لاحظ أن هذه الدالة متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ ومتناقصة ايضاً على الفترة $(-\infty,0)$.

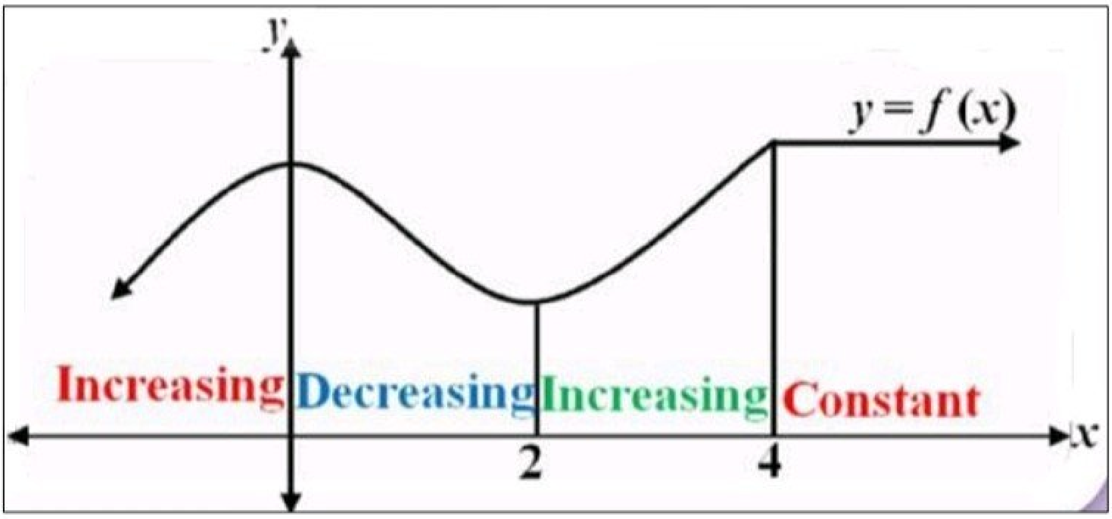
x	$f(x)$
−2	−0.5
−1	−1
0	undefined
1	1
2	0.5



تعريف: يقال للدالة $f(x)$ أنها رتيبة monotonic على فترة I أذا كانت اما متزايدة على I أو متناقصة على I .

تعريف: يقال عن الدالة $y=f(x)$ أنها ثابتة constant على الفترة [a, b] أذا تحقق،

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \forall\ x_1,x_2\in[a,b]$$



من الشكل نلاحظ أن الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty,0)$ ومتناقصة على الفترة $(0,2)$ ومتزايدة مرة أخرى على الفترة $(2,4)$ وثابتة على الفترة $(4,\infty)$.

تعريف: أذا كان العدد c في منطلق الدالة f وكان أما $f'(\mathrm{c}) = 0$ أو $f'(\mathrm{c})$ غير موجودة، فيقال أن c عدد حرج critical number للدالة f . وقيمة الدالة عند هذا العدد، أي $f(\mathrm{c})$ ، تسمى بالقيمة الحرجة. وتسمى النقطة $(\mathrm{c}, f(\mathrm{c}))$ بالنقطة الحرجة للدالة f (أو أحداثيات النقطة الحرجة).

أيجاد النقاط الحرجة للدالة:

أولاً: نُوجِد المشتقة الأولى للدالة، ثم نوجد الاعداد الحرجة للدالة كالاتي:

- إذا كان هناك قيم x تجعل المشتقة غير معرَّفة (بشرط هذه القيم تقع في منطلق الدالة) فهذه القيم تمثل أعداد حرجة.
- نساوي المشتقة الأولى بالصفر، ثم نَحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيم x. أذا كانت القيم الناتجة لــ x تقع في منطلق الدالة فهذه القيم أيضاً تمثل أعداد حرجة للدالة.

ثانياً: نعوِّض القيم الناتجة لــ x (الاعداد الحرجة التي حصلنا عليها في الخطوات السابقة) في الدالة لإيجاد القيم الحرجة للدالة.

ثالثاً: النقاط الحرجة للدالة (أو أحاثيات النقاط الحرجة للدالة) تكون بالشكل: $(x, f(x))$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^2 - 2\,x$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن منطلقها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x - 2$$

بما أن المشتقة الأولى معرفة على جميع قيم x ، أي لا يوجد قيم x تجعل المشتقة غير معرفة.

إذاً علينا إيجاد قيم x الممكنة فقط؛ بحيث تكون المشتقة الأولى مساوية للصفر.

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \in \mathrm{D}_f$$

وهكذا، العدد الحرج هو $x = 1$. يمكننا إيجاد قيمة الدالة عند هذا العدد:

$$f(1) = 1^2 - 2\,(1) = -1.$$

اذاً النقطة الحرجة للدالة هي $(1, -1)$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

الحل: لاحظ أن منطلق هذه الدالة هو $[0, \infty)$ وأن

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$. وبما أن العدد 0 يقع في منطلق الدالة، فأن العدد الحرج لهذه الدالة هو $x = 0$. أما الاعداد الحرجة التي يتم الحصول عليها بمساواة المشتقة الأولى بالصفر، نلاحظ أن

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

وهذا غير ممكن. لذلك فأن العدد الحرج الوحيد لهذه الدالة هو $x = 0$. أما النقطة الحرجة للدالة فهي:

$$(0, f(0)) = \left(0, \sqrt{0}\right) = (0,0)$$

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \frac{x^2+16}{x^2}$

الحل: منطلق هذه الدالة هو $\mathbb{R} - \{0\}$. نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x) = \frac{x^2(2x) - (x^2+16)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 32x}{x^4} = \frac{-32x}{x^4} = \frac{-32}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-32}{x^3}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$ ، ولكن العدد 0 لا ينتمي الى مجال الدالة. كذلك اذا تم مساواة المشتقة بالصفر فأن:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-32}{x^3} = 0 \Rightarrow -32 = 0$$

وهذا غير ممكن. أذاً لا توجد أعداد حرجة للدالة، وعليه ليس هناك نقاط حرجة للدالة.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^4 - 8\,x^2$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن منطلقها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

لأيجاد الأعداد الحرجة، نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، ثم نضعها تساوي الصفر ونحل المعادلة بالنسبة لـــ x .

$$f'(x) = 4\,x^3 - 16\,x = 0 \Rightarrow 4\,x\,(x^2 - 4) = 0$$
$$\Rightarrow 4\,x\,(x+2)\cdot(x-2) = 0$$

وبحل المعادلة نحصل على الأعداد الحرجة:

$$x = 0\,, \qquad x = -2\;, \quad x = 2$$

ومنها نحصل على القيم الحرجة للدالة:

$$f(0) = 0$$
$$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$$

$$f(2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$$

أذاً النقاط الحرجة للدالة هي:

$$(0,0)\;, \qquad (-2,-16)\;, \qquad (2,-16)$$

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) ،

- أذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، فان f متزايدة على الفترة (a,b) .
- أذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، فان f متناقصة على الفترة (a,b).
- اذا كانت $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، فأن f ثابتة على الفترة (a,b).

أي أن إشارة المشتقة الأولى تمكننا من معرفة تزايد وتناقص الدالة.

خطوات تحديد فترات التزايد والتناقص للدالة

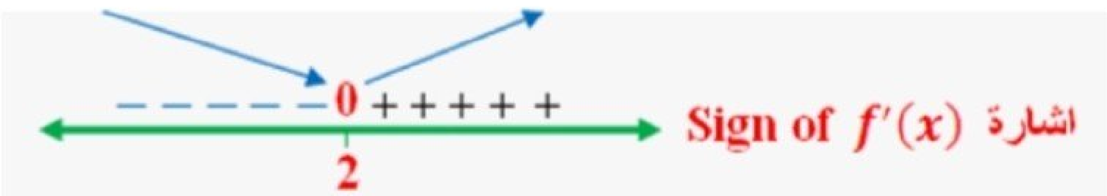
- نجد الاعداد الحرجة للدالة ونعينها على خط الاعداد، ومنها يتم تحديد الفترات.
- نختار عدد من كل فترة ونحسب المشتقة في هذا العدد.
- اذا كانت أشارة المشتقة موجبة تكون الدالة متزايدة واذا كانت سالبة تكون الدالة متناقصة.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$

الحل:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in \mathrm{D}_f.$$

وبذلك يكون لدينا فترتين هما $(-\infty,2)$ و $(2,\infty)$.



لأختبار الفترة $(-\infty,2)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 1$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$ سالبة

هذا يعني أن الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(-\infty,2)$.

لأختبار الفترة $(2,\infty)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 3$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2 > 0$ موجبة

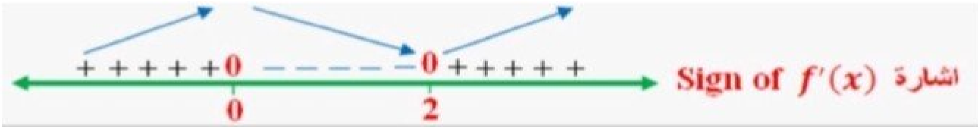
وعليه، فأن الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2,\infty)$.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow 3x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0,$ or $x = 2$.

هذه القيم لـــ x تمثل أعداد حرجة للدالة.



لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, \infty)$.

أختبار الفترة $(-\infty, 0)$: لنأخذ $x = -1$ ، فأن

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$.

أختبار الفترة $(0, 2)$: لنأخذ $x = 1$ ، فأن

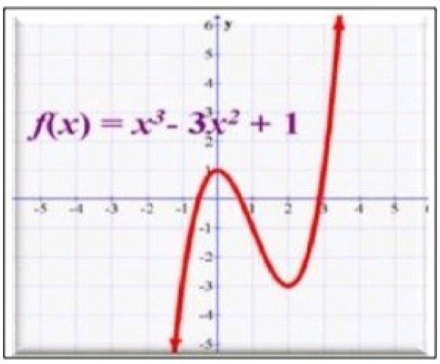
$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 < 0$ سالبة

أذاً الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(0, 2)$.

أختبار الفترة $(2, \infty)$: لنأخذ $x = 3$ ، فأن

$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2, \infty)$.



مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

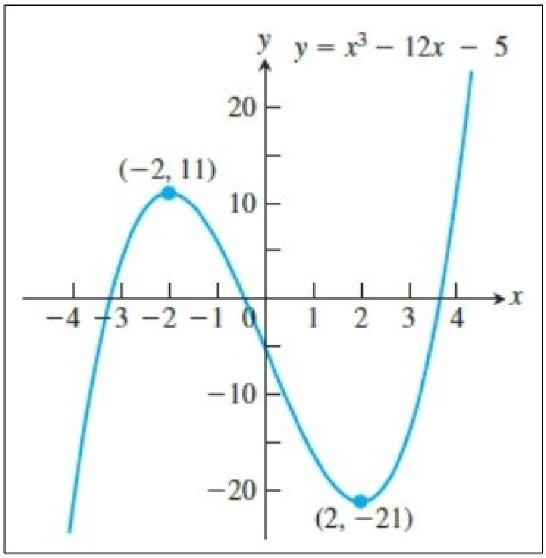
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 3(x+2)(x-2) = 0$$

$\Rightarrow x = -2, \text{ or } x = 2$ أعداد حرجة

وبذلك يكون لدينا ثلاث فترات $(-\infty, -2)$ ، $(-2, 2)$ ، $(2, \infty)$.

Interval	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluated	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Sign of f'	+	−	+
Behavior of f	increasing	decreasing	increasing

واضح ان الدالة f متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ ، متناقصة على الفترة $(-2, 2)$ ، ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$.



الاسبوع الرابع عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة الاسس واللوغاريتمات هو من اساسيات الرياضيات ولة اهمية كبيره في فهم التغيرات السريعة الاسس والبطيئة او النسبية ويستخدم في الفيزياء والهندسة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

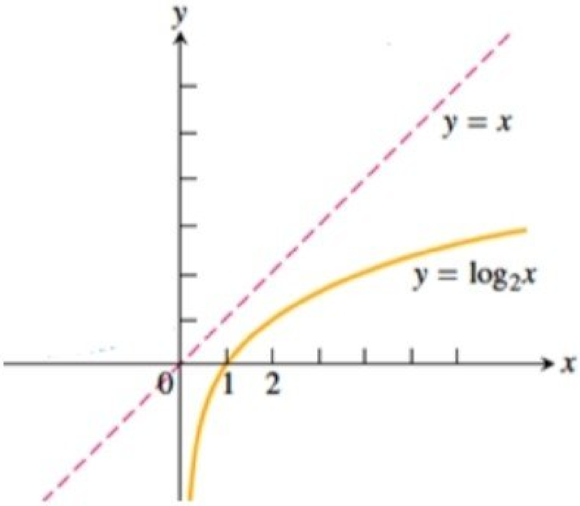
أساليب التقويم:

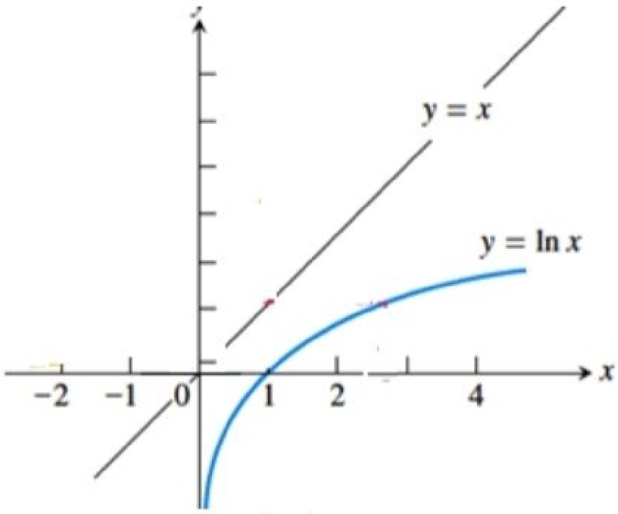
- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

الاسس واللوغاريتمات

الدالة اللوغاريتمية $y = log_a u \ , y = \ln u$ ***Logarithm Function***





قواعد اللوغاريتمات

1. $\log_a(u\,.\,v) = \log_a u + \log_a v$ *and* $\ln(u\,.\,v) = \ln u + \ln v$
2. $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$ *and* $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$
3. $\log_a u^n = n\log_a u$ *and* $\ln u^n = n\ln u$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a a^u = u$
6. $\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$

منطلق ومدى الدالة اللوغاريتمية :

اذا كان $y = \log_a u(x)$ فان $Domain = \{u : u > 0\}$ و $Range : -\infty < y < \infty$

مثال (١) جد منطلق ومدى الدالة $y = \ln(x^2 - 4)$

الحل: نضع $x^2 - 4 > 0$

نجد النقط الحدودية $(x+2)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2\,,2$

$$\begin{array}{ccccc} ++++ & | & ---------- & | & ++++ \\ (-\infty,-2) & -2 & (-2,2) & 2 & (2,\infty) \end{array}$$

$$\boldsymbol{D} = (-\infty,-2) \cup (2,\infty) \qquad and \qquad \boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$and \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال (٢) جد y' للدوال التالية :

1. $y = \ln(5x^2 + 2x)$

2. $y = \ln\left(2x\sqrt{3x+1}\right)$

3. $y = \ln(x^2 + 4) - x\tan^{-1}\frac{x}{2}$

الحل :

1. $$y' = \frac{10x + 2}{5x^2 + 2x}$$

2. $$y = \ln(2x) + \ln\sqrt{3x+1}$$

$$= \ln(2x) + \frac{1}{2}\ln(3x+1)$$

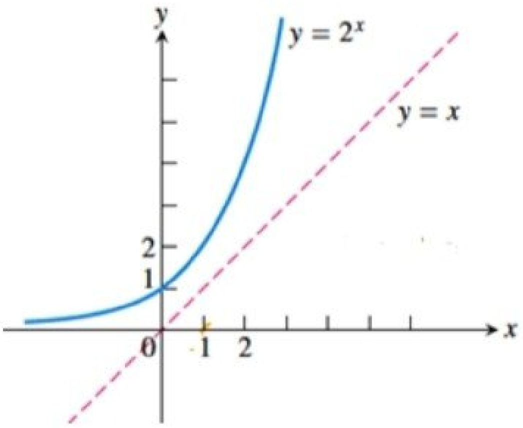
$$\therefore \; y' = \frac{2}{2x} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{3x+1} = \frac{1}{x} + \frac{3}{2(3x+1)}$$

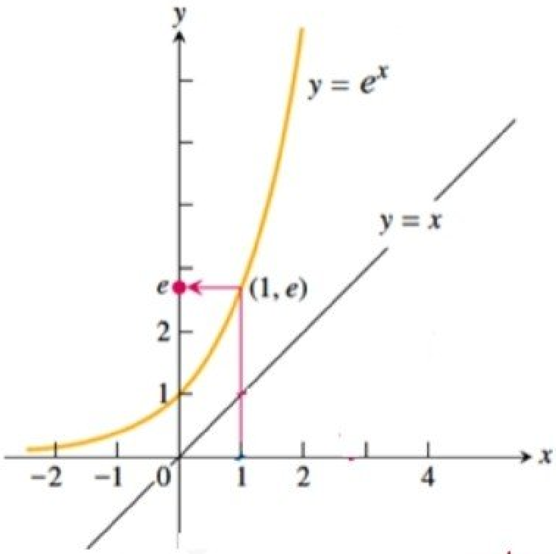
3. $$y' = \frac{2x}{x^2+4} - \left(\frac{x\times\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{2x}{x^2+4} - \frac{2x}{4+x^2} - \tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$= -\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

Exponential Function $y = a^u$, $y = e^u$ الدالة الاسية





قواعد الأسس

$$1.\ a^{u+v} = a^u . a^v$$

$$2.\ a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$$

$$3.\ (a^u)^v = a^{u.v}$$

$$4.\ a^u = e^{u \ln a}$$

مشتقة الدالة الأسية :

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u . \frac{du}{dx} . \ln a$$

$$and\ \frac{d}{dx} e^u = e^u . \frac{du}{dx}$$

مثال (٣) جد المشتقة الثانية للدوال التالية :

1. $y = e^{2x^2-3x}$ 2. $y = 3xe^{2x}$

الحل

1. $y' = (4x-3)e^{2x^2-3x}$

$y'' = (4x-3)^2 e^{2x^2-3x} + 4e^{2x^2-3x}$

2. $y' = 3xe^{2x} \times 2 + 3e^{2x} = 3(2x+1)e^{2x}$

$y'' = 6(2x+1)e^{2x} + 6e^{2x}$

منطلق ومدى الدالة الأُسية :

اذا كان $y = a^u$ فان $Domain : -\infty < u < \infty$ و $Range : \{y : y > 0\}$

العلاقة بين الدالتين الاسية واللوغاريتمية

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

مثال (٤) جد قيمة x لكل ما يلي :

1. $\log 2x = -8$
2. $\log(3x - 5) = 2$

الحل :

1. $2x = 10^{-8}$

   $x = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

2. $3x - 5 = 10^2$

   $3x = 100 + 5$

   $x = 35$

تمارين

جد قيمة x لكل ما يلي :

1. $\log(3x - 1) = -3$ 2. $\log(7x - 12) = 2$

جد y' للدوال التالية :

3. $y = \ln(x^2 + x)$ 4. $y = (x \ \ln x) - x$

5. $y = e^{\sin^{-1} x}$ 6. $y = x \tan^{-1} x - \ln \sqrt{x}$

جد منطلق ومدى الدوال

7. $y = \ln(x^2 - 2x - 15)$ 8. $y = \ln(3x - x^2)$

الاسبوع الخامس عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم التطبيقات الفيزياوية ورسم الدوال هو جزء مهم جدا من ربط الرياضيات بالواقع ويساعد الطلاب في وصف الظواهر الطبيعية مثل الحركة والسرعة والقوى

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضر

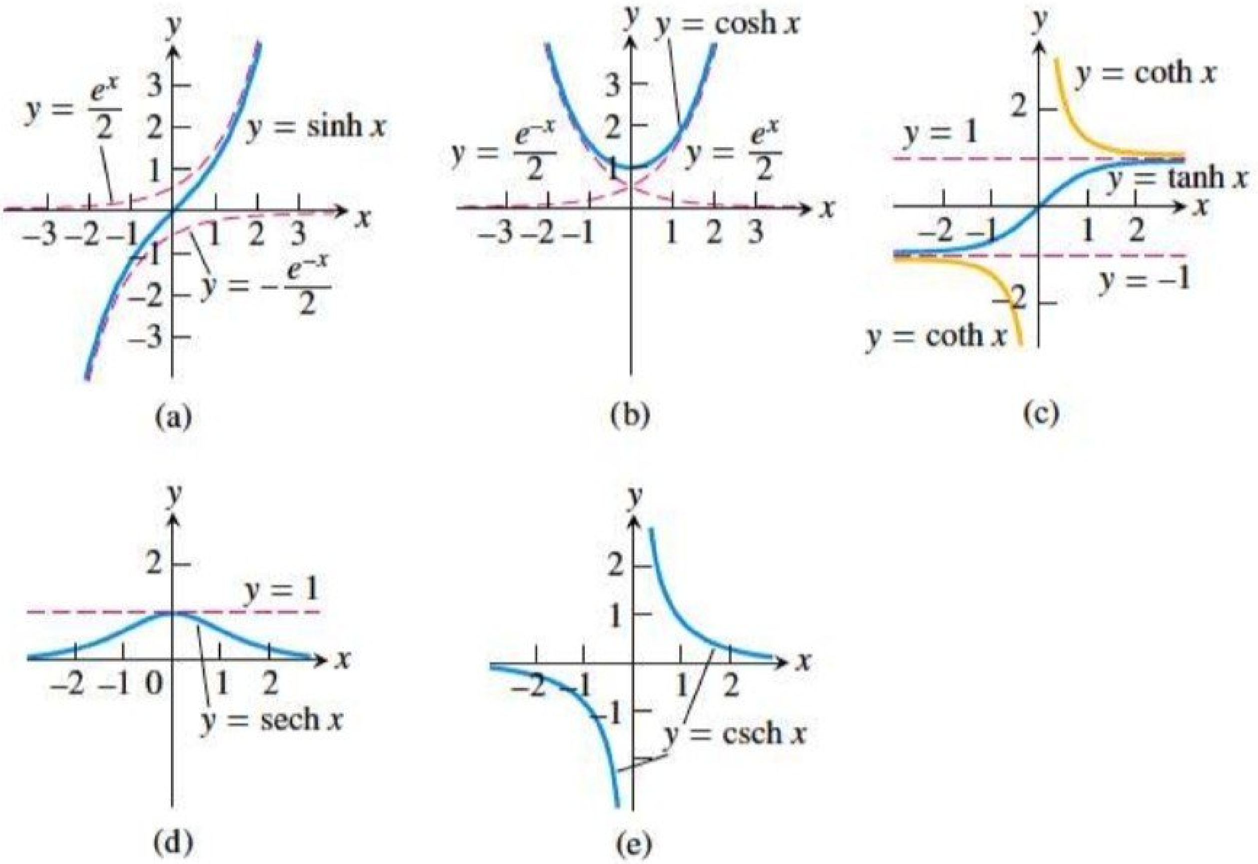
تطبيقات فيزياوية وهندسية ورسم الدوال

Hyperbolic functions الدوال الزائدية

$1.\ \sinh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{2}$ $\qquad$ $2.\ \cosh u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}$

$3.\ \tanh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$ $\qquad$ $4.\ \coth u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{e^{u} - e^{-u}}$

$5.\ \operatorname{sech} u = \dfrac{2}{e^{u} + e^{-u}}$ $\qquad$ $6.\ \operatorname{csch} u = \dfrac{2}{e^{u} - e^{-u}}$



بعض المتطابقات:

$1.\ \cosh u + \sinh u = e^{u}$ $\qquad$ $2.\ \cosh u - \sinh u = e^{-u}$

$3.\ \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ $\qquad$ $4.\ \cosh(-u)$

$= \cosh u \ \&\ \ \sinh(-u) = -\sinh u$

$5.\ \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$ $\qquad$ $6.\ \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$7.\ \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x$ $\qquad$ $8.\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$9.\ 2\cosh^2 x = \cosh 2x + 1$ $\qquad$ $10.\ 2\sinh^2 x = \cosh 2x - 1$

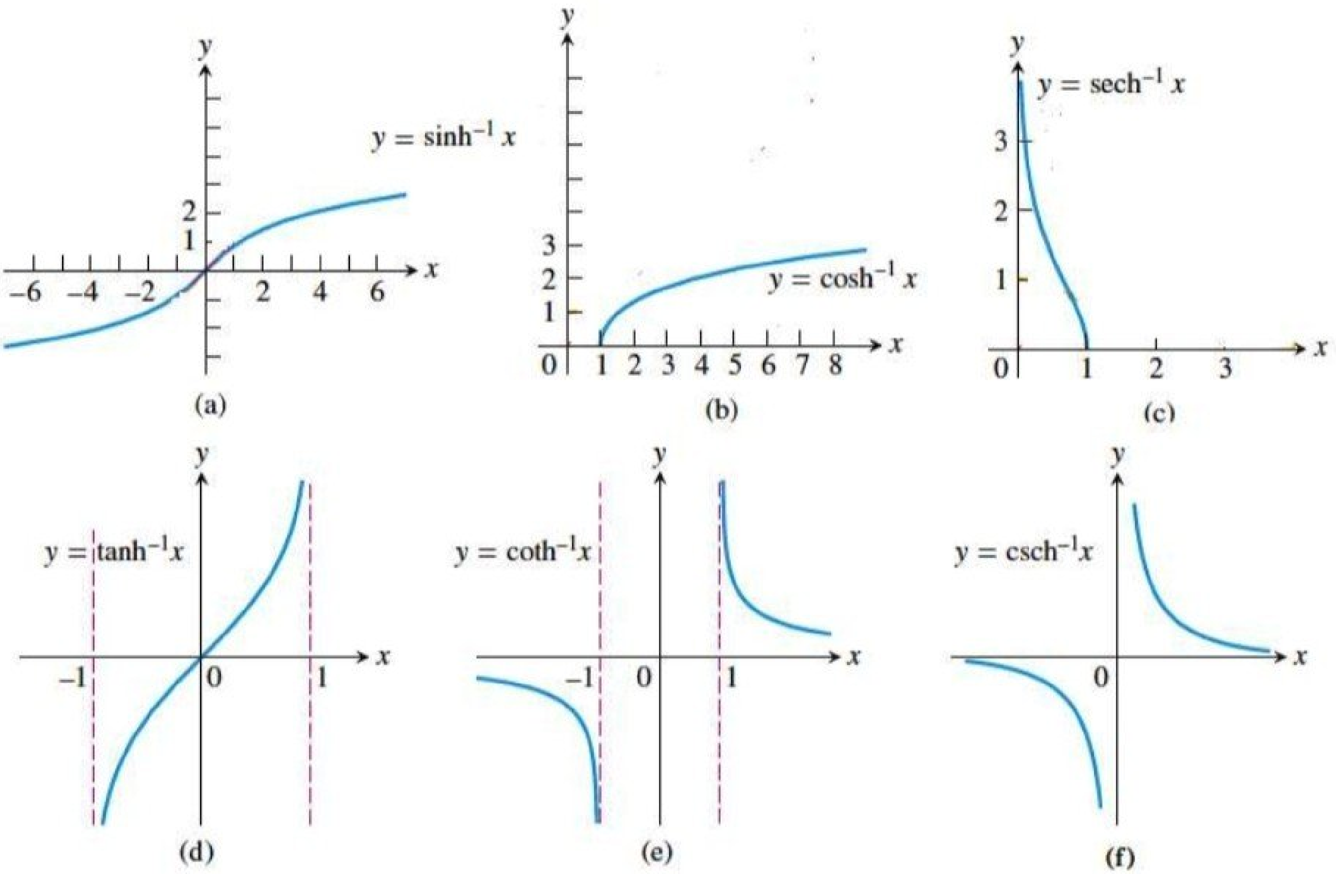
مشتقات الدوال الزائدية :

1. $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \, \frac{du}{dx}$ 2. $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \, \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \, \frac{du}{dx}$ 4. $\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \, \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \, \frac{du}{dx}$ 6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \, \frac{du}{dx}$

The inverse hyperbolic functions الدوال الزائدية العكسية



$y = \sinh^{-1} x$ *means* $x = \sinh y$ *and* $y = \cosh^{-1} x$ *means* $x = \cosh y$

1. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; $-\infty < x < \infty$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$; $x \geq 1$
3. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $0 < x \leq 1$
4. $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$
5. $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1} = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $|x| \geq 1$

البرهان :

$$1. let \quad u = \sinh^{-1} x \quad \to \quad x = \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \to \quad 2x = e^u - e^{-u}$$

$$2x = e^u - \frac{1}{e^u} \quad \to \quad 2x = \frac{e^{2u} - 1}{e^u} \quad \to \quad 2xe^u = e^{2u} - 1$$

$$e^{2u} - 2xe^u - 1 = 0$$

اذا فرضنا ان $y = e^u$ فان $y^2 = e^{2u}$ وتصبح المعادلة من الدرجة الثانية بـالمتغير y

$$y^2 - 2xy - 1 = 0$$

ونجد قيمة y باستعمال قانون الدستور

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad e^u = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad \to \quad u = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

هنا نهمل القيمة $\ln\left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ لان $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \quad \forall x$

$$\therefore \quad \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية :

$$1. \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} . \frac{du}{dx} \qquad 2. \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} . \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} . \frac{du}{dx} \; ; |u| < 1 \qquad 4. \frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} . \frac{du}{dx} \; ; |u| > 1$$

$$5. \frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{1 - u^2}} . \frac{du}{dx} \qquad 6. \frac{d}{dx}(\text{csch}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{1 + u^2}} . \frac{du}{dx}$$

مثال (١٤) جد y' للدوال التالية :

$1. \sinh y = \tan x \qquad 2. \sin^{-1} x = \text{sech}\, y \qquad 3. y = \sinh(\tan^{-1} e^{2x})$

الحل

$$1. \quad y' \cosh y = \sec^2 x \quad \to \quad y' = \frac{\sec^2 x}{\cosh y} \quad \to \quad y' = \text{sech}\, y. \sec^2 x$$

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -y' \,\text{sech}\, y \tanh x \quad \to \quad y' = \frac{-1}{\text{sech}\, y \tanh x \sqrt{1 - x^2}}$$

$$3. \quad y' = \cosh(\tan^{-1} e^{2x}) * \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$