وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التقني العمارة
قسم تقنيات المساحة

الحقيبة التدريسية لمادة
الرياضيات

الصف الاول

تدريسي المادة
م.م ساره فوزي غافل

الفصل الدراسي الاول

جدول مفردات مادة الرياضيات

الاسبوع	المفردات
1	مراجعة في حل المعادلات من الدرجة الاولى والدرجة الثانية باستخدام القانون العام وحل معادلتين من الدرجة الاولى انيا وبيانيا
2	المصفوفات انواعها جمع وطرح المصفوفات
3	منقول المصفوفة معكوس المصفوفة ضرب المصفوفات
4	المحددات الثنائية والثلاثية
5	حل المعادلات الانية باستخدام المحددات
6	معادلة المستقيم تعامد مستقيمين توازي مستقيمين بعد نقطة عن مستقيم
7	المثلثات بعض القوانين المستخدمة في حل المثلث
8	حل المثلث بعض القوانين المستخدمة في حل المثلث
9	تمارين متنوعة في حل المثلث
10	القطاع الدائري القطعة الدائرية ايجاد المساحة والمحيط
11	المشتقة الدوال المتعددة الحدود الدوال الضمنية
12	مشتقة الدوال المثلثية
13	تطبيقات المشتقة
14	التكامل تكامل الدوال الجبرية
15	تكامل الدوال المثلثية

الهدف من دراسة مادة الرياضيات (الهدف العام):

تهدف المادة ان يكون الطالب قادرا على تطبيق المعادلات والطرق الرياضية و استخدامها في مجالات المساحة الارضية والمسح الجوي والخرائط والمساحة من مجالات علم الهندسة

الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول / قسم تقنيات المساحة

التقنيات التربوية المستخدمة:

1. سبورة واقلام
2. السبورة التفاعلية
3. عارض البيانات Data Show
4. جهاز حاسوب محمول Laptop
5. مختبر الحاسبات

الاسبوع الأول

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم حل معادلة المستقيم والتعامل مع تعامد وتوازي المستقيمات وفهم العلاقات الهندسية بين المستقيمات وتطبيقها في حل مسائل متنوعة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

مراجعة في حل المعادلات من الدرجة الاولى والدرجة الثانية

باستخدام القانون العام وحل معادلتين من الدرجة الاولى انيا وبيانيا

3.1 معادلات الدرجة الأولى

تعريف:

المعادلة عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مكتوبة على صيغة طرفين بينهما إشارة يساوي (=) وتسمى هذه المتغيرات مجاهيل.

حل المعادلة نقصد به إيجاد قيم المجاهيل العددية التي تحقق التساوي في المعادلة. أي أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر بعد التعويض بهذه القيم.

أولاً: معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد

مثال: أوجد حل المعادلة

$$3x + 7 = -5$$

الحـــــــل

$$3x + 7 = -5$$

$$3x = -5 - 7 \quad \Rightarrow \quad 3x = -12$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-12}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$2x - 5 = 3x - 7$$

الحـــــــل

$$2x - 5 = 3x - 7$$

$$2x - 3x = -7 + 5$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$3(x + 2) - 4(x - 3) = 0$$

الحـــــــل

$$3(x + 2) - 4(x - 3) = 0$$

$$3x + 6 - 4x + 12 = 0$$

$$-x + 18 = 0$$

$$-x = -18$$

$$x = 18$$

حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة كسر

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{3x-1}$$

الحـــــــل

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{3x-1}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(1)(3x-1) = (2x)(1)$$

$$3x - 1 = 2x$$

$$3x - 2x = 1$$

$$x = 1$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$$

الحـــــــل

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(2)(x-1) = (3)(1)$$

$$2x - 2 = 3$$

$$2x = 3 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة جذر

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt{x} = 6$$

الحـــــــل

$$\sqrt{x} = 6$$

بتربيع الطرفين

$$(\sqrt{x})^2 = (6)^2$$

$$x = 36$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt{3x - 8} = 1$$

الحـــــــل

$$\sqrt{3x - 8} = 1$$

بتربيع الطرفين

$$\left(\sqrt{3x - 8}\right)^2 = (1)^2$$

$$3x - 8 = 1$$

$$3x = 1 + 8$$

$$3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt[3]{x-3} = -2$$

الحـــــل

$$\sqrt[3]{x-3} = -2$$

بتكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3 = (-2)^3$$

$$x - 3 = -8$$

$$x = -8 + 3$$

$$x = -5$$

ثانياً: معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

وهما يمثلان هندسياً خطين مستقيمين.

عند حل المعادلتين يجب دراسة الحالات الثلاث الآتية:

- الحالة الأولى: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متوازيين غير متقاطعين، وبالتالي **فإن المعادلتين ليس لهما حل.**
- الحالة الثانية: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين منطبقين، وبالتالي **فإن المعادلتين لهما عدد لا نهائي من الحلول.**
- الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة، وبالتالي **فإن للمعادلتين حل وحيد.**

مثال: هل يوجد للمعادلتين التاليتين حل؟

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$6x + 9y = -21$$

الحـــــــل

أولاً: نرتب المعادلتين على الصورة العامة.

$$2x + 3y = -7$$
$$6x + 9y = -21$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-21} = \frac{1}{3}$$

بما أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$$

إذاً الخطين منطبقين وعليه يوجد عدد لانهائي من الحلول.

ثالثاً: طرق حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

يوجد عدد من الطرق لحل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين وسنركز فقط على طريقتين وهما:

1) طريقة التعويض
2) طريقة الحذف

ملاحظة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين وتفضل الآلة الحاسبة

$$\text{Casio } fx - 991\ ES\ PLUS$$

مثال: أوجد حل المعادلتين:

$$y - 3x = 12$$
$$y + 3x = 2$$

الحـــــــل

$$y - 3x = 12 \qquad (1)$$
$$y + 3x = 2 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) وَ (2) نجد أن

$$2y = 14 \quad \Rightarrow \quad y = 7$$

بالتعويض عن $y = 7$ فى المعادلة (2) نجد أن

$$7 + 3x = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2 - 7$$

$$\Rightarrow \quad 3x = -5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$$

إذاً حل المعادلتين هو

$$x = -\frac{5}{3}, \qquad y = 7$$

مثال: أوجد حل المعادلتين:

$$2x - 3y = 3$$
$$3x + y = 2$$

الحـــــــل

$$2x - 3y = 3 \qquad \mathbf{(1)}$$
$$3x + y = 2 \qquad \mathbf{(2)}$$

بضرب المعادلة (2) في 3 نجد أن

$$9x + 3y = 6 \qquad \mathbf{(3)}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) نجد أن

$$11x = 9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{9}{11}}$$

بالتعويض عن $x = \frac{9}{11}$ فى المعادلة (2) نجد أن

$$3 \times \frac{9}{11} + y = 2 \quad \Rightarrow y = 2 - \frac{27}{11} = \frac{22 - 27}{11} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}$$

إذاً حل المعادلتين هو

$$x = \frac{9}{11}, \qquad y = -\frac{5}{11}$$

الاسبوع الثاني

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم المصفوفات هو تطوير فهم عميق لمفاهيم الجبر الخطيةوتطبيقاتها المتعددة المصفوفات هي ادوات رياضية اساسية تستخدم لتمثيل وتنظيم البيانات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الأختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المصفوفات انواعها جمع وطرح المصفوفات

2. المصفوفات Matrices

عند معالجة منظومة المعادلات الخطية سابقاً وجدنا أنما يهمنا هو المعاملات ومواضعها في هذه المنظومة و عند إرجاعها بالصيغة المدرجة من الضروري الحفاظ على ترتيب المجاهيل من المعادلات وعندئذٍ يمكن ترتيب المعاملات بشكل مستطيلي يسمى مصفوفة (Matrix). في هذا البند سوف نتعرف على مفهوم المصفوفة و دراسة بعض أنواع المصفوفات و العمليات عليها و كذلك دراسة الخواص الأساسية لها.

المصفوفة : عبارة عن مجموعة من الأعداد تنتمي الى حقل معين (F) عناصرها مرتبة في جدول مستطيل، يسمى كل سطر أفقي من عناصر المصفوفة صفاً (row) و يسمى كل سطر رأسي عموداً (column). عادة ما يرمز للمصفوفة بأحد الأحرف الانكليزية الكبيرة مثل A, B, C ... الخ.

ملاحظات :

1) غالباً ما يكون الحقل (F) المعرفة عليه المصفوفة هو مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) أو مجموعة الأعداد المعقدة (Complex numbers).

2) المصفوفة A التي لها m من الصفوف و n من الأعمدة تكتب على النحو الآتي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

و نقول ان المصفوفة A ذات سعة (درجة) m x n حيث m يمثل عدد صفوف المصفوفة A و n يمثل عدد أعمدة المصفوفة A . يرمز للعنصر في المصفوفة A بشكل عام بـ a_{ij} حيث i يمثل رقم الصف الموجود فيه العنصر a_{ij} و يمثل j رقم العمود الموجود فيه العنصر a_{ij} حيث $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

3) في كثير من الأحيان سوف نرمز للمصفوفة ببساطة بالصيغة المختزلة $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ أو $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ اذا كانت سعة المصفوفة معروفة ضمنياً، حيث (الحقل F) $a_{ij} \in$.

أمثلة : 1) لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ ، من الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×2 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R .

2) لتكن $A=\begin{bmatrix}i & 2-i & 1\\ -i & 0 & 1+i\end{bmatrix}$ ، حيث $i=\sqrt{-1}$. فمن الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×3 معرفة على حقل الأعداد المعقدة C .

بعض المصفوفات الخاصة Some special matrices

المصفوفة الصفرية (Zero matrix): يقال للمصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ بأنها مصفوفة صفرية اذا كانت جميع عناصر المصفوفة أصفار أي ان $a_{ij}=0$ لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

مثال : اكتب مصفوفة صفرية سعة 4×3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل : المصفوفة هي $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

ملاحظة : تسمى المصفوفة الصفرية بمصفوفة المحايد الجمعي وسوف نرمز لها بالرمز 0 .

المصفوفة المربعة (Square matrix): يقال للمصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ بأنها مصفوفة مربعة اذا كانت $m=n$ (أي عدد صفوف A = عدد أعمدة A). و غالباً ما يقال للمصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ بأنها مصفوفة مربعة ذات سعة n (أي ذات سعة $n\times n$).

مثال : اكتب مصفوفة مربعة ذات سعة 3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل: المقصود بالمصفوفة ذات سعة 3 أي ذات سعة 3×3 وهي على سبيل المثال $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 8 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

القطر الرئيسي و القطر الثانوي Main and Secondary diagonals

لتكن
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & & & . & & & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$
مصفوفة مربعة ذات سعة n ،

فانه يقال للقطر $[a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}]$ بأنه قطر رئيسي للمصفوفة A (أي ان $i=j$) لكل $1\le i\le n$ و $1\le j\le n$. ويقال للقطر $[a_{1n},a_{2(n-1)},a_{3(2-n)},...,a_{n1}]$ بأنه قطر ثانوي للمصفوفة A .

<u>مثلاً</u>: في المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ القطر الرئيسي هو $[-1,8,0]$ بينما القطر الثانوي هو $[3,8,1]$.

مصفوفة سطر و مصفوفة عمود (Row and Column matrices): المصفوفة A ذات السعة $1\times n$ تسمى مصفوفة سطر ، بينما المصفوفة A ذات السعة $m\times 1$ تسمى مصفوفة عمود.

<u>مثلاً</u>: المصفوفة $A=[3 \quad 1 \quad 1 \quad -2]$ هي مصفوفة سطر ذات سعة 1×4 ،

بينما المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود ذات سعة 2×1 .

المصفوفة القطرية (Diagonal matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ بأنها مصفوفة قطرية اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i\ne j$.

<u>مثال</u> : بين فيما اذا كانت المصفوفات التالية قطرية أم لا و المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ليست مصفوفة قطرية لان $a_{13}=3\neq 0$. بينما $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية.

<u>ملاحظة</u> : من الممكن كتابة المصفوفة القطرية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بدلالة قطرها الرئيسي أي تكتب بالنحو التالي : $A=dig\lfloor a_{11},a_{22,}a_{33},...,a_{nn}\rfloor$.

<u>فمثلاً</u>: المصفوفة القطرية A في المثال السابق ممكن ان تكتب على النحو التالي :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=dig[-1,1,6]$$

<u>مثال</u> : اكتب $A=dig[3,-1,1,2]$ بدلالة المصفوفة المكونة لها ؟

الحل : من الواضح ان المصفوفة القطرية A ذات سعة 4، عليه $A=dig[3,-1,1,2]=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

المصفوفة القياسية (Scalar matrix): يقال للمصفوفة القطرية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة قياسية اذا كانت جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية، أي ان $A=dig[a,a,a,...,a]$.

<u>مثلاً</u> : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ هي مصفوفة قياسية سعة 2 و قياسها = 3 .

بينما المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة قطرية سعة 4 لكنها ليست قياسية.

المصفوفة (المحايدة أو الأحادية) (Identity matrix): يقال للمصفوفة القياسية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة محايدة (أحادية) اذا كان قياسها = 1، أي ان $A = dig[1,1,1,\ldots,1]$.

مثلاً : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة محايدة ذات سعة 3 .

ملاحظة : تسمى المصفوفة المحايدة بمصفوفة المحايد الضربي وسوف نرمز لها بالرمز I أو I_n .

المصفوفة المثلثية السفلى (Lower triangular matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة مثلثة سفلى اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i<j$ (أي ان جميع العناصر فوق القطر الرئيسي هي أصفار).

أي تكون بالصيغة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0.&.&.&0\\a_{21}&a_{22}&0&0&.&.&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&&.&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&&&.\\&&&.&&&\\&&&.&&&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&.&.&.&a_{nn}\end{bmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العليا (Upper triangular matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة مثلثية عليا اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i>j$ (أي ان جميع العناصر تحت القطر الرئيسي هي أصفار).

أي تكون بالصيغة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}.&.&.&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}&.&.&a_{2n}\\0&0&a_{33}&a_{34}.&.&.&a_{3n}\\0&0&0&a_{44}&&&\\&&&.&&&\\&&&.&&&\\0&0&0&.&.&.&a_{nn}\end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

جمع مصفوفتين: اذا كانت $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ و $B=\lfloor b_{ij} \rfloor$ مصفوفتين على الحقل F ومن نفس السعة فان $A+B$ مصفوفة من السعة نفسها و تعرف بالشكل التالي : $A+B=\lfloor a_{ij}+b_{ij} \rfloor$.

مثال : جد ناتج جمع المصفوفتين التاليتين $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

الحل : $A+B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+(2) & 0+1 \\ 3+(-3) & 2+1 \\ 1+1 & 3+(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

نلاحظ ان كل من A و B من السعة 3×2 لذلك $A+B$ هو من السعة 3×2 .

تمرين : اذا كان $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ c & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ فجد كل من قيم a ، b و c ؟

ضرب مصفوفة بعدد: اذا كانت $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة على الحقل F وليكن $k\in F$ (عدد قياسي) ، فان kA هو مصفوفة تعرف بالشكل التالي : $kA=\lfloor ka_{ij} \rfloor$.

ملاحظات : 1) اذا كان $k=-1$ فان $(-1)A=-A$.

2) $A+(-B)=A-B$.

مثال : لتكن $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ جد $3A$ و $(\frac{-1}{2})A$ ؟

الحل :

$$3A=\begin{bmatrix}3\times5 & 3\times-1 & 3\times2\\ 3\times0 & 3\times1 & 3\times1\\ 3\times0 & 3\times3 & 3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -3 & 6\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$(\frac{-1}{2})A=\begin{bmatrix}(\frac{-1}{2})\times5 & (\frac{-1}{2})\times-1 & (\frac{-1}{2})\times2\\ (\frac{-1}{2})\times0 & (\frac{-1}{2})\times1 & (\frac{-1}{2})\times1\\ (\frac{-1}{2})\times0 & (\frac{-1}{2})\times3 & (\frac{-1}{2})\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

المبرهنة التالية تعطي بعض الخواص الأساسية لعمليتي جمع المصفوفات و ضرب مصفوفة بعدد.

<u>مبرهنة</u> : اذا كانت $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ ، $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ و $C=\lfloor c_{ij}\rfloor$ ثلاث مصفوفات على الحقل F ومن نفس السعة وكان $r,s\in F$ فان :

1) $A+B=B+A$ 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ 3) $A+0=A$

4) $A+(-A)=0$ 5) $r(A+B)=rA+rB$ 6) $(r+s)A=rA+sA$

البرهان : 1) $A+B=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}+a_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}\rfloor+\lfloor a_{ij}\rfloor=B+A$

اذن $A+B=B+A$.

4) $A+(-A)=\lfloor a_{ij}\rfloor+(-\lfloor a_{ij}\rfloor)=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor -a_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+(-a_{ij})\rfloor=\lfloor a_{ij}-a_{ij}\rfloor=[0]=0$

اذن $A+(-A)=0$.

5) $r(A+B)=r(\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor)=r\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor=\lfloor r(a_{ij}+b_{ij})\rfloor=\lfloor ra_{ij}+rb_{ij}\rfloor$

$=\lfloor ra_{ij}\rfloor+\lfloor rb_{ij}\rfloor=r\lfloor a_{ij}\rfloor+r\lfloor b_{ij}\rfloor=rA+rB$

اذن $r(A+B)=rA+rB$.

نترك (2) ، (3) و (6) كـ (واجب) .

تمرين : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ جد $3A-B$ ؟

تمرين : حل المعادلة المصفوفية (أي جد قيمة المصفوفة A) $A+2\begin{bmatrix}-1 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$.

الضرب الاقليدي : اذا كان $A=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ متجهاً صفياً و كان $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ .\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً ، فنعرف الضرب الاقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي : $AB=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

ضرب مصفوفتين: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من السعة $n\times k$ فان $AB=[c_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times k$ ، حيث c_{ij} هو حاصل الضرب الاقليدي للصف i من المصفوفة A في العمود j من المصفوفة B ، أي ان $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

ملاحظة : عملية ضرب مصفوفتين لا تتحقق إلا في حالة كون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يكون مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ما عدا ذلك لا تتحقق عملية الضرب لمصفوفتين .

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ فجد كل من AB و BA ؟

الحل: نلاحظ ان عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B = 2 . عليه عملية الضرب متحققة.
أيضاً المصفوفة الناتجة AB تكون من السعة 2×2 ، أي ان $AB=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$. عليه سوف يكون $c_{ij}=\sum_{k=1}^{2}a_{ik}b_{kj}$ ، لذلك نحصل على ان :

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=(-1).1+2.2=3$$
$$c_{12}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=(-1).1+2.0=-1$$
$$c_{21}=\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k1}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=1.1+3.2=7$$
$$c_{22}=\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1.1+3.0=1$$

لذلك نحصل على $AB=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$.

نترك أيجاد BA كـ (واجب) .

ملاحظة هامة : يمكننا أيجاد حاصل ضرب المصفوفتين بالمثال السابق بالطريقة التالية وتعمم هذه الطريقة على جميع المصفوفات القابلة للضرب وكالآتي : نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{11} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{12} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{21} في مصفوفة الضرب AB ، و أخيراً نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{22} في مصفوفة الضرب AB .

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1).1+2.2 & (-1).1+2.0\\ 1.1+3.2 & 1.1+3.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$$

الاسبوع الثالث

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم المصفوفاات هو تطوير فهم عميق لمفاهيم الجبر الخطيةوتطبيقاتها المتعددة المصفوفات هي ادوات رياضية اساسية تستخدم لتمثيل وتنظيم البيانات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

منقول المصفوفة معكوس المصفوفة ضرب المصفوفات

المصفوفات القابلة للانعكاس

تعريف : اذا كانت A مصفوفة مربعة سعة n . يقال بان A قابلة للعكس (Invertible) اذا وجدت مصفوفة مربعة B سعة n بحيث ان $AB = BA = I$. نرمز لمعكوس المصفوفة A بالرمز A^{-1} أي ان $B = A^{-1}$ بحيث ان $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

مثال : اثبت ان $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ هي معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

الحل : نلاحظ ان

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

عليه $AB = BA = I$ أي ان $B = A^{-1}$.

مثال : اثبت ان المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس .

الحل : نفرض ان $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي معكوس للمصفوفة A ، لذلك $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}$

لكن لدينا $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عليه نحصل $\begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و لذا $c = 1$ و $c = 0$ وهذا تناقض . اذن A ليس لها معكوس .

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للعكس و ليكن B و C معكوساً للمصفوفة A فان $C = B$.

البرهان : بما ان B هو معكوس للمصفوفة A اذن $AB = BA = I$.

بما ان C هو معكوس للمصفوفة A اذن $AC = CA = I$.

اذن $C = C.I = C(AB) = (CA)B = IB = B$ ، أي ان $C = B$.

من خلال المبرهنة أعلاه نستنتج ان كل مصفوفة قابلة للعكس فان معكوسها وحيد.

المبرهنة التالية تعطي بعض الخواص الأساسية للمصفوفات القابلة للعكس، حيث ان جميع المصفوفات الواردة في هذه المبرهنة تكون مربعة و من نفس الدرجة.

مبرهنة (للإطلاع) :

(1) ان معكوس المصفوفة الأحادية I هي نفسها ، أي ان $I^{-1}=I$.

(2) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس فان $(A^{-1})^{-1}=A$.

(3) اذا كان لكل من المصفوفتين A و B معكوس فان $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(4) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس وليكن $k\geq 1$ فان A^{k} مصفوفة قابلة للعكس وان $(A^{k})^{-1}=(A^{-1})^{K}$.

(5) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس وليكن $0\neq r\in R$ فان rA أيضاً تكون مصفوفة قابلة للعكس وان $(rA)^{-1}=\dfrac{1}{r}A^{-1}$.

(6) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس فان A^{T} أيضاً مصفوفة قابلة للعكس وان $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

المصفوفة الأولية (Elementary matrix) : هي مصفوفة مربعة سعة n ناتجة من المصفوفة المحايدة I_n بعد أجراء عملية واحدة فقط من العمليات الصفية الأولية عليها .

مثال : المصفوفة $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة أولية ناتجة من المصفوفة المحايدة $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ بعد ضرب الصف الثاني بالثابت 3 .

بينما $E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ مصفوفة أولية ناتجة من المصفوفة المحايدة $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ بعد ضرب الصف الثالث بالثابت -1 وأضافته للصف الثاني .

كيفية أيجاد معكوس مصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة . لغرض أيجاد معكوس المصفوفة A نتبع الخطوات التالية :

(1) نستخدم العمليات الصفية لتحويل $[A|I]$ الى الصيغة المدرجة الصفية المختزلة و لتكن $[B|C]$.

(2) اذا كانت $B = I$ فان $C = A^{-1}$.

(3) اذا كانت $B \neq I$ فانه لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

__مثال :__ جد معكوس المصفوفة (ان وجد) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل : نضع المصفوفة A بالصيغة التالية :

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2:r_1+r_2,\ \ r_3:-2r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2:r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2:-r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1:-r_2+r_1,\ \ r_3:-4r_2+r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3:-r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{r2:-r_3+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

اذن A مصفوفة قابلة للعكس و معكوسها هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

مثال : جد معكوس المصفوفة (ان وجد) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$.

الحل : نضع المصفوفة A بالصيغة التالية :

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2:-4r_1+r_2,\ \ r_3:-7r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2:\frac{-1}{3}r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1:-2r_2+r_1,\ \ r_3:6r_2+r3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right].$$

بما ان جميع عناصر الصف الأخير للمصفوفة اليسرى هو أصفار، اذن لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

تمرين : احسب معكوس كل من المصفوفات التالية (ان وجد) :

$$\begin{bmatrix}1 & 7 & 12\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix} ، \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} ، \begin{bmatrix}-1 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix} ، \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

تمرين : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ جد $3A-B$ ؟

تمرين : حل المعادلة المصفوفية (أي جد قيمة المصفوفة A) $A+2\begin{bmatrix}-1 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$.

الضرب الاقليدي : اذا كان $A=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ متجهاً صفياً و كان $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ .\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً ، فنعرف الضرب الاقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي : $AB=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

ضرب مصفوفتين: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من السعة $n\times k$ فان $AB=[c_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times k$ ، حيث c_{ij} هو حاصل الضرب الاقليدي للصف i من المصفوفة A في العمود j من المصفوفة B ، أي ان $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

ملاحظة : عملية ضرب مصفوفتين لا تتحقق إلا في حالة كون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يكون مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ما عدا ذلك لا تتحقق عملية الضرب لمصفوفتين .

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ فجد كل من AB و BA ؟

الحل: نلاحظ ان عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B = 2 . عليه عملية الضرب متحققة. أيضاً المصفوفة الناتجة AB تكون من السعة 2×2 ، أي ان $AB=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$. عليه سوف يكون $c_{ij}=\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj}$ ، لذلك نحصل على ان :

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=(-1).1+2.2=3$$
$$c_{12}=\sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=(-1).1+2.0=-1$$
$$c_{21}=\sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k1}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=1.1+3.2=7$$
$$c_{22}=\sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1.1+3.0=1$$

لذلك نحصل على $AB=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$.

نترك أيجاد BA كـ (واجب) .

ملاحظة هامة : يمكننا أيجاد حاصل ضرب المصفوفتين بالمثال السابق بالطريقة التالية وتعمم هذه الطريقة على جميع المصفوفات القابلة للضرب وكالآتي : نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{11} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{12} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{21} في مصفوفة الضرب AB ، و أخيراً نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{22} في مصفوفة الضرب AB .

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1).1+2.2 & (-1).1+2.0\\ 1.1+3.2 & 1.1+3.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$$

ملاحظة : من الممكن أيجاد مصفوفتين $A \neq 0$ و $B \neq 0$ بحيث يكون $AB = 0$ ، فعلى سبيل المثال

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، لكن $AB = \begin{bmatrix} 1.0 + 0.0 & 1.0 + 0.1 \\ 0.0 + 0.0 & 0.0 + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

تمرين : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ فجد كل من AB و BA ان أمكن ذلك ؟

الاسبوع الرابع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم المحددات الثنائية والثلاثية هو فهم كيفية حسابها واستخدامها في حل المعادلات الخطية وفهم تطبيقاتها في مجالات مثل تحليل المتجهات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المحددات الثنائية والثلاثية

خواص المحددات

سنقدم الخواص الأساسية للمحددات وكذلك نقدم علاقة هامة جداً بين قيمة محدد مصفوفة و وجود معكوس لها.

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة و تحتوي صف (أو عمود) جميع عناصره أصفار فان $|A| = 0$.

البرهان : نفرض ان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n و ليكن r_k صف جميع عناصره أصفار ، عليه كل حد من حدود $|A|$ يحتوي على عنصر من الصف r_k ، لذا يكون ذلك الحد مساوي للصفر ، اذن $|A| = 0$.

مبرهنة : اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال صفين (أو عمودين) فان $|B| = -|A|$.

البرهان : نفرض ان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n ونفرض ان المصفوفة B حصلنا عليها بعد تبديل صفين من صفوف المصفوفة A . عليه اذا كان $n = 2$ فان $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ لذلك $|B| = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -|A|$. اذا كان $n > 2$ فأننا سوف نستخدم الصف i لحساب $|B|$ (على افتراض ان i ليس احد الصفين المبدلين) لذلك نحصل على :

$$|B| = (-1)^{i+1} a_{i1}|B_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|B_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}|B_{in}|$$

نلاحظ ان B_{ij} هي المصفوفة التي نحصل عليها بعد إبدال صفين من المصفوفة A_{ij} . اذا كان $n = 3$ فان B_{ij} من السعة 2 و باستخدام حالة $n = 2$ نحصل على $|B_{ij}| = -|A_{ij}|$ أي ان

$$\begin{aligned} |B| &= (-1)^{i+1} a_{i1}(-|A_{i1}|) + (-1)^{i+2} a_{i2}(-|A_{i2}|) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}(-|A_{in}|) \\ &= -[(-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|] = -|A| \end{aligned}$$

و بالتالي $|B| = -|A|$. أما اذا كان $n > 3$ فأننا نكرر الخطوات السابقة حتى نصل الى النتيجة.
ان برهان حالة تبديل عمودين مشابهة لبرهان حالة تبديل صفين .

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة و تحتوي على صفين (أو عمودين) متساويين فان $|A| = 0$.

البرهان : نفرض ان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة سعة n و ليكن r_i و r_j صفين متساوين فيها. نفرض ان المصفوفة B ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال الصفين r_i و r_j. نلاحظ ان $A = B$ وعليه $|A| = |B|$ ... (1).

لكن بواسطة المبرهنة السابقة يكون لدينا $|B|=-|A|$ ...(2) . من الحالتين (1) و (2) نحصل على ان $|A|=|B|=-|A|$ يؤدي الى ان $|A|=-|A|$ أي ان $2|A|=0$ و لذلك $|A|=0$.

مبرهنة : كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب صف (أو عمود) بثابت k فان $|B|=k|A|$.

البرهان: نفرض ان $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مربعة سعة n و لتكن

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & ka_{1j} & . & . & a_{1n} \\ . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . \\ a_{i1} & . & . & ka_{ij} & . & . & a_{in} \\ . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . \\ a_{n1} & . & . & ka_{nj} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

سوف نحسب محدد B باستخدام العمود j فنحصل على :

$$|B|=(-1)^{1+j}ka_{1j}|B_{1j}|+(-1)^{2+j}ka_{2j}|B_{2j}|+\ldots+(-1)^{n+j}ka_{nj}|B_{nj}|$$
$$=k[(-1)^{1+j}a_{1j}|B_{1j}|+(-1)^{2+j}a_{2j}|B_{2j}|+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nj}|B_{nj}|]$$
$$=k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|B_{ij}|=k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

و ذلك لان $A_{ij}=B_{ij}$ لكل j . عليه نحصل على ان $|B|=k|A|$.

مبرهنة : اذا كانت $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مثلثية عليا (أو سفلى) من السعة n فان $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}..a_{nn}$.

البرهان : سوف نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي في البرهان . نفرض ان A مصفوفة مثلثية عليا .

اذا كان $n=2$ أي ان $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ و لذلك فان $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}.0=a_{11}a_{22}$. عليه العبارة تكون صحيحة عندما تكون $n=2$. نفرض ان العبارة صحيحة عندما تكون $n=k$ أي انه اذا كان $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{kk}$ فان $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}..a_{kk}$. سوف نبرهن ان العبارة تبقى صحيحة عندما $n=k+1$.

لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية عليا من السعة $k+1$

فان $|A| = (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + \ldots + (-1)^{K+2} a_{1(k+1)}|A_{1(K+1)}|$

لكن لدينا $0 = |A_{1(K+1)}| = \ldots = |A_{13}| = |A_{12}|$ (كون كل مصفوفة تحوي عمود عناصره جميعها أصفار).

عليه $|A| = a_{11}|A_{11}|$ حيث ان $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2(k+1)} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من السعة k .

لذلك بواسطة احتمال $n=k$ يكون $|A_{11}| = a_{22}a_{33}a_{44}..a_{(k+1)(k+1)}$ وبالتالي $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}..a_{(k+1)(k+1)}$.

تمرين :

(1) برهن انه اذا كانت $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة قطرية من السعة n فان $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}..a_{nn}$.

(2) برهن انه اذا كانت $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة محايدة من السعة n فان $|A| = 1$.

(3) برهن انه اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب احد الصفوف (أو الأعمدة) بثابت غير صفري وإضافة الناتج الى صف (أو عمود) آخر فان $|A| = |B|$.

(4) اذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من السعة n وليكن k ثابت غير صفري ، اثبت ان :

(a) $|kA| = k^n|A|$ **(b)** $|AB| = |A||B|$ **(c)** $|AB| = |BA|$. هل ان $|A+B| = |A| + |B|$ ؟

تعريف: لتكن A و B مصفوفتين. نقول ان المصفوفتين A و B متكافئتان صفياً (تكتب رياضياً $A \sim B$)
اذا حصلنا على احدهما من الأخرى بإجراء أي عدد منته من العمليات الصفية الأولية.

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ أربعة مصفوفات .

فان $A \sim B$ لان المصفوفة B ناتجة من المصفوفة A بعد ضرب الصف الأول بـ (-1) و إضافة الناتج للصف الثاني. كذلك $A \sim C$ لان المصفوفة C ناتجة من المصفوفة A بعد أبدال الصف الأول مع الثاني و من ثم ضرب الصف الأول بـ ($\frac{1}{2}$) . بينما المصفوفتين A و D غير متكافئتان صفياً .

المبرهنة التالية تقدم لنا الشرط اللازم و الكافي لمعرفة متى يكون لمصفوفة ما معكوس .

<u>مبرهنة</u> : المصفوفة المربعة A تكون قابلة للعكس اذا فقط اذا كان $|A| \neq 0$.

البرهان : نفرض ان $A \sim B$ حيث B هي الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A . من خلال مبرهنات سابقة نجد ان $|B| = k|A|$ حيث $k \in R$. عليه $|A| \neq 0$ اذا وفقط اذا كان $|B| \neq 0$. من ناحية اخرى $B = I$ أو ان B تحتوي على صف صفري. اذا كان B تحتوي على صف صفري فان $|B| = 0$ و هذا تناقض، اذا يجب ان يكون $B = I$ ، و بالتالي $|A| \neq 0$ اذا وفقط اذا كان A مصفوفة قابلة للعكس .

<u>مثال</u> : بين أي من المصفوفتين التاليتين قابلة للعكس $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}27 & 2 & 1\\ 5 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

الحل : بما ان $|A| = 9-(-2) = 11$ أي ان $|A| \neq 0$ عليه بواسطة المبرهنة السابقة تكون A قابلة للعكس.
لكن $|B| = 27(0-(-1)) - 2(15-(-1)) + 1(5-0) = 27 - 32 + 5 = 0$ عليه بواسطة المبرهنة السابقة تكون A غير قابلة للعكس.

<u>مثال</u> : جد قيم الثابت الحقيقي k التي تجعل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}k-1 & 1\\ 2 & k\end{bmatrix}$ قابلة للعكس .

الحل: بما ان A مصفوفة قابلة للعكس اذن $|A| \neq 0$، أي ان $\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$ لذلك $(k-1)k-2 \neq 0$ عليه $k^2-k-2 \neq 0$ يؤدي الى ان $(k-2)(k+1) \neq 0$ لذلك $k-2 \neq 0$ و $k+1 \neq 0$ أي ان $k \neq 2$ و $k \neq -1$. اذن قيم k هي $R-\{-1,2\}$.

<u>**مبرهنة للاطلاع**</u> **: (1)** المصفوفة المربعة A تكون قابلة للعكس اذا فقط اذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب عدد منته من مصفوفات أولية، أي ان $A = E_1E_2E_3..E_t$ حيث $E_1, E_2,\ldots,E_t$ مصفوفات أولية.

(2) اذا كانت E مصفوفة أولية فان $|E| = |E^T|$.

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة فان $|A| = |A^T|$.

البرهان : نفرض A مصفوفة مربعة. اذا كانت <u>A مصفوفة قابلة للعكس</u> فان A^T أيضاً تكون مصفوفة قابلة للعكس ، و بواسطة المبرهنة السابقة (1)، نستطيع كتابة $A = E_1E_2E_3..E_t$ حيث ان $E_1, E_2,\ldots,E_t$ هي مصفوفات أولية، و لذلك $A^T = (E_1E_2E_3..E_t)^T = E_t^T \ldots E_3^T E_2^T E_1^T$ ، و بالتالي يكون لدينا

لان $E_1, E_2,\ldots,E_t$ مصفوفات أولية $|A| = |E_1E_2E_3\ldots E_t| = |E_1||E_2||E_3|..|E_t| = |E_1^T||E_2^T||E_3^T|..|E_t^T|$

$= |E_t^T|..|E_3^T||E_2^T||E_1^T|$ (بواسطة المبرهنة السابقة (2))

$= |E_t^T \ldots E_3^T E_2^T E_1^T| = |A^T|$

اذا كانت A <u>مصفوفة غير قابلة للعكس</u> فمن الواضح ان A^T تكون أيضاً مصفوفة غير قابلة للعكس وعليه $|A| = 0 = |A^T|$. من الحالتين نستنتج أن $|A| = |A^T|$.

العامل المرافق

اذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة سعة n ولتكن A_{ij} مصفوفة جزئية من A. فيسمى $\left|A_{ij}\right|$ بمصغر (minor) العنصر a_{ij} . أما العامل المرافق (cofactor) للعنصر a_{ij} الذي يرمز له بالرمز C_{ij} يُعَرف على النحو الآتي : $C_{ij}=(-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$.

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ احسب C_{13} و C_{23} .

الحل :

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=1(0-4)=-4$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-(2-4)=2$$

في الحقيقة نستطيع أيجاد محدد مصفوفة ما باستخدام أي صف أو أي عمود بالمصفوفة وهذا ما تنص عليه المبرهنة التالية التي نقدمها للإطلاع .

مبرهنة للاطلاع : اذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة سعة n فان :

ا) باستخدام الصف i : $|A|=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\ldots+a_{in}C_{in}$ لكل $1\le i\le n$.

ب) باستخدام العمود j : $|A|=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\ldots+a_{nj}C_{nj}$ لكل $1\le j\le n$.

مثال : احسب محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ باستخدام العمود الثالث .

الحل :

$$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + ... + a_{33}C_{33}$$

$$= 3.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 6.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-12) + 8 + 12 = 8$$

تعريف: لتكن $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مربعة سعة n و لتكن $C = \lfloor C_{ij} \rfloor$ هي مصفوفة العوامل المرافقة للعناصر a_{ij} . تسمى المصفوفة C^T بـ (المصفوفة المرافقة) للمصفوفة A (adjoint of A) و يرمز لها بالرمز $adjA$.

مثال : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ احسب $adjA$ ؟

الحل : يجب أيجاد المصفوفة $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ و كالآتي :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times 0 = 0 \quad ، \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \times 2 = -2 \text{ ،}$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \times 1 = -1 \quad ، \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \times 2 = 2$$

عليه $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و لذلك فان $adjA = C^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

مبرهنة للاطلاع : اذا كانت $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ مصفوفة مربعة سعة n فان :

ا) باستخدام الصف i : $a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + ... + a_{in}C_{kn} = 0$ عندما $i \neq k$.

ب) باستخدام العمود j : $a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + ... + a_{nj}C_{nk} = 0$ لكل $j \neq k$.

الاسبوع الخامس

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف هو ايجاد قيم المتغيرات المجهولة في نظام المعادلات مجموعة معادلات مرتبطة بطريقة منظمة وفعالة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

حل المعادلات الانية باستخدام المحددات

استخدام المعينات والمصفوفات في حل جملة معادلات خطية بعدة متحولات

درسنا في المحاضرات السابقة المعينات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها المعرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية أو فوق حقل الأعداد العقدية ثم قمنا بدراسة حل جملة معادلات خطية بمتحولين وبثلاث متحولات باستخدام المعينات (المحددات) من المرتبة الثانية والمرتبة الثالثة. ندرس في هذه المحاضرة حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف المتتالي للمجاهل وطريقة غوص.

6.1 جملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

- تسمى العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال للجملة
- وتسمى العناصر b_i المقادير الحرة (أو الثابتة)
- العناصر x_i المجاهل
- **كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة وإذا كان احدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.**

تسمى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

مصفوفة المعاملات .

والمصفوفة الموسعة $\overline{A}$ **التي هي :**

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

فإذا رمزنا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر :

$$AX = B \qquad (4)$$

أن حل جملة المعادلات الخطية (1) يعني إيجاد جميع المتجهات X التي تحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة :

1- هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل .

2- إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حلا لها ؟

3- كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

6.2 حل جملة n معادلة و n مجهول

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

6.2.1 طريقة مقلوب المصفوفة:

من العلاقة (4) : $\quad AX = B$

حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A نظامية غير شاذة أي $\Delta \neq 0$ فانه يوجد لـ A معكوس A^{-1}.

لذلك بضرب طرفي العلاقة (4) من اليسار بـ A^{-1} نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أو

$$X = A^{-1}B \qquad (5)$$

ويكون الحل **وحيدا**. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو متجه العمود X الذي جميع عناصره معدومة . تدعى هذه الطريقة **بالطريقة المصفوفية** لحل جملة المعادلات الخطية.

مثال 1: حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

كنا وجدنا في المثال (1) من المحاضرة السادسة أن $\Delta = \det A \neq 0$ وان :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فان :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد أن الحل هو

$$x_1 = 13 , \quad x_2 = -12 , \quad x_3 = 4$$

6.2.2 طريقة كرامر:

أن الصعوبة العملية سابقا كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A ولكن الصيغة (5) تسمح بإيجاد طريقة أكثر عملية لإيجاد الحل وتتلخص كما يلي :

لدينا $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\Gamma(A)$

حيث $\Gamma(A)$ ملاصق A (أي منقول مصفوفة المتممات الجبرية):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث A_{ij} هو عامل (المتمم الجبري) للعنصر a_{ij} وبالتالي :

$$X = \frac{1}{\Delta}\Gamma(A)B$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

حيث Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من معين المصفوفة A بعمود المقادير الحرة (أو الثابتة) B .

- إذا كان $\Delta \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = 1,2,.....,n$$

- أما إذا كان $\Delta = 0$ نميز حالتين :

الحالة الأولى : $\Delta_i \neq 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ جملة المعادلات الخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية : $\Delta_i = 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول. **تدعى هذه الطريقة بطريقة كرامر**

مثال 2: استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال (1).

بما أن $\Delta \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = 1,2,3$$

أي أن :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13 \, , x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 4$$

6.2.3 طريقة الحذف المتتالي للمجاهل:

للسهولة سوف نلزم أنفسنا بجملة أربع معادلات بأربع مجاهيل :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \qquad (7)$$

تتلخص هذه الطريقة كما يلي : أن نحسب أحد المجاهيل من معادلة مناسبة من الجملة بدلالة المجاهيل الباقية ونعوضه في المعادلات الباقية فنحصل على $(m-1)$ معادلة فيها $(m-1)$ مجهول ثم نعيد الكرة حتى نحصل على معادلة واحدة بمجهول واحد نحسبه ونعود بشكل معاكس لحساب بقية المجاهيل الواحد تلو الآخر .

مثال 3 : استخدم طريقة الحذف بالتتالي في حل جملة المعادلات :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \qquad (1)$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \qquad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \qquad (3)$$

نحسب x_2 من المعادلة (2) فنجد : (4) $\quad x_2 = 2x_1 + x_3 - 6$

نعوض(4) في (1) فنجد : $x_1 + 2(2x_1 + x_3 - 6) + 3x_3 = 8$

ومنه : $5x_1 + 5x_3 = 20$ أي

$$x_1 + x_3 = 4 \qquad (5)$$

نعوض (4) في (3) فنجد : $x_1 + 3(2x_1 + x_3 - 6) - x_3 = -5$

ومنه (6) $\quad 7x_1 + 2x_3 = 13$.

نحسب x_1 من المعادلة (5) فنجد : (7) $\quad x_1 = 4 - x_3$

لنعوض في (6) فنجد : $7(4-x_3)+2x_3=13$ ومنه $x_3=3$ و منه بالتعويض في (7) فنجد $x_1=1$ ونعوض في (4) فنجد أن $x_2=-1$.

مثال 4: استخدم طريقة الحذف بالتتالي في تعيين مجموعة حلول الجملة (أن وجدت):

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \qquad (1)\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \qquad (2)\\
-3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

بجمع المعادلات الثلاثة السابقة طرفا إلى طرف نجد أن $5=0$, وهذا مستحيل إذن الجملة مستحيلة الحل.

6.3 طريقـة غوص :

تتلخص طريقة غوص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A : B]$.لنذّكر أولاً ببعض المفاهيم الأخرى على المصفوفات وأهمها :

6.3.1 التحويلات الأولية على المصفوفات :

نسمي التحويلات التالية في المصفوفات تحويلات أولية :

1- مبادلة السطر i بالسطر j ونرمز لهذه العملية R_{ij} .

2- ضرب جميع عناصر السطر i بالعدد k ونرمز لهذه العملية بالرمز $R_i(k)$.

3- إضافة إلى عناصر السطر j عناصر السطر i مضروبة بالعدد k ونرمز لهذه العملية $R_{ij}(k)$.

ملاحظة : نرمز بـ $A \approx B$ إذا كانت B تنتج عن A بتحويلات أولية .

6.3.2 تكافؤ مصفوفتين :

نقول عن مصفوفتين A و B أنهما متكافئتين إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بسلسلة من التحويلات الأولية المفروضة .

ملاحظة : إن المصفوفتين المتكافئتين يكون لهما نفس الرتبة .

6.3.3 المصفوفة السطرية المدرجة :

نقول عن مصفوفة A إنها سطرية مدرجة إذا تحقق فيها الصفات الآتية :

- الأسطر غير الصفرية في المصفوفة A **تسبق الأسطر الصفرية (إن وجدت).**

- العنصر الرائد لكل سطر يقع على يمين العنصر الرائد للسطر الذي يسبقه. **حيث يعرف العنصر الرائد في السطر الأول بأنه العنصر الأول الذي قيمته يساوي الواحد .**

مثال5 : حدد أي من المصفوفات الآتية تشكل مصفوفة سطرية مدرجة:

$$(a)\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\quad (b)\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 6\end{bmatrix}\quad (c)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\quad (d)\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

مثال6 : أوجد المصفوفة السطرية المدرجة المكافئة للمصفوفة الآتية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 8\\ 1 & -3 & 3 & -4\\ 4 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

من الأسهل أن يكون العنصر الرائد مساوياً 1 لذلك نبدل بين السطر الأول والثاني :

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 2 & 8\\ 4 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نقوم بالتحويلات : $R_3-4R_1\ ,R_2-2R_1$

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -4\\ 0 & 7 & -4 & 16\\ 0 & 14 & -13 & 17\end{bmatrix}$$

نقوم بالتحويلات : R_3-2R_2 نحصل على:

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -4\\ 0 & 7 & -4 & 16\\ 0 & 0 & -5 & -15\end{bmatrix}$$

نقسم السطر الثاني على 7, ونقسم السطر الثالث على -5 فنحصل على :

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -4\\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{16}{7}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة السطرية المدرجة والمكافئة للمصفوفة A .

الآن بالعودة إلى طريقة غوص في حل جملة من المعادلات الخطية, وكما قلنا تتلخص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A:B]$ وتكون على الشكل الآتي :

- نكتب المصفوفة الموسعة $H=[A:B]$ لجملة المعادلات الخطية المفروضة.
- نوجد المصفوفة السطرية المدرجة المكافئة للمصفوفة H وذلك بأجراء بعض التحويلات الأولية عل الأسطر .

- نكتب جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة السطرية المدرجة.
- نحل جملة المعادلات الناتجة فنحصل على حلول الجملة المفروضة.

مثال7 : استخدم طريقة غوص في حل جملة المعادلات :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

نكتب المصفوفة الموسعة :
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \vdots & 8 \\ 1 & -3 & +3 & \vdots & -4 \\ 4 & 2 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

لنقوم الآن بسلسلة من العمليات الأولية على المصفوفة الموسعة كما في المثال السابق ونحصل على المصفوفة السطرية المدرجة :

$$H \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الآن : نكتب جملة المعادلات المكافئة للمعادلات المفروضة :من السطر الثالث يكافئ المعادلة $x_3 = 3$ وان السطر الثاني يكافئ المعادلة :

$$1x_2 - \frac{4}{7}x_3 = \frac{16}{7}$$

نعوض $x_3 = 3$ في المعادلة ونحسب x_2 فيكون : $x_2 = \frac{12}{7} + \frac{16}{7} = 4$

السطر الأول يكافئ المعادلة : $1x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4$

نعوض x_3, x_2 في المعادلة ونحسب x_1 فيكون : $x_1 = 3.4 - 3.3 - 4 = -1$

وبالتالي يكون حل جملة المعادلات المفروضة هو : $x_3 = 3$، $x_1 = -1, x_2 = 4$.

6.4 حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

في هذه الحالة تكون أعمدة المقادير الحرة (الثابتة) يساوي الصفر وتصبح الجملة بالشكل :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (20)$$

أو بالشكل المختصر $AX = 0$

وكما وجدنا سابقاً أنه من الواضح أن $x_i = 0$ أيا كان $i = 1,2,\dots\dots,n$ حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة.

ونشير هنا إلى إنه إذا كان $X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ و $X_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ حلان للجملة (20) فان كلا من

$$X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \lambda X_1 = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix}$$

هي حلول لهذه الجملة.

وبشكل عام إذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_r$ حلولا للجملة فان

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots\dots + \lambda_r X_r$$

يكون حلا لها.

ونعلم أيضاً أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حلولا **غير الحل الصفري** هو أن يكون محدد الأمثال مساوياً للصفر.

مثال 8:

1- ناقش حلول الجملة الخطية المتجانسة التالية بحسب قيم K :

$$\begin{aligned} 3x + ky - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x + ky - 3z &= 0 \end{aligned}$$

الحل:

نحسب معين الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & k & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & k & -3 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & -3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} k & -1 \\ k & -3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3-k) - 2(-3k+k) + (k+1)$$

$$= -9 - 3k + 4k + k + 1$$

$$= 2k - 8$$

نلاحظ أن $\Delta \neq 0$ عندما $k \neq 4$ وعندها يكون للجملة الحل الصفري وحيد.

أما من أجل $k = 4$ يكون $\Delta = 0$ وللجملة عدد غير منته من الحلول وتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

نجري تحويلات أولية على مصفوفة الأمثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R13} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R1+R3]{-2R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8}R3]{-\frac{1}{7}R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R2+R3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتؤول الجملة إلى المعادلتين:

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 0 \qquad (1) \\ y - z &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

وبالتالي عدد المجاهيل يزيد بمقدار واحد على عدد المعادلات وبالتالي نفرض متحول حر وليكن z

من (2) نجد $y = z$

نعوض في (1) فيكون $x = -z$

ويكون $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

وبالتالي من أجل كل قيمة لـــ z نحصل على حل جديد للجملة.

الاسبوع السادس

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم حل معادلة المستقيم والتعامد والتوازي والبعد بين نقطة ومستقيم هو فهم العلاقات الهندسية بين الخطوط المستقيمة وتطبيقاتها المختلفة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

حل معادلة المستقيم والتعامد والتوازي و البعد بين نقطة و المستقيم

✓ إذا كان لمستقيمين نفس الميل, فهما متوازيان .

مثال 1:

$$\begin{cases}(D_1): y = -2x + 1\\(D_2): y = -2x + 5\end{cases}$$
لدينا (D_1) و (D_2) لهما نفس الميل إذن فهما متوازيان .

مثال 2:

نعتبر المستقيم (AB) بحيث : $(AB): y = -3x + 5$

حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D) المار بالنقطة $C(2;1)$ والموازي للمستقيم (AB) .

الحل : بما أن ميل (AB) هو -3 و $(AB)//(D)$ فإن $a_{(AB)} = a_{(D)} = -3$

ومنه المعادلة المختصرة للمستقيم (D) هي : $(D): y = -3x + p$

لنحدد p : بما أن (D) يمر من النقطة C إذن $1 = -3 \times 2 + p$ إذن $1 = -6 + p$

ومنه $1 + 6 = p$ إذن $p = 7$ وبالتالي $(D): y = -3x + 7$

2) شرط تعامد مستقيمين:

خاصية

✓ يكون مستقيمان متعامدان ،إذا كان جداء ميلهما يساوي -1 .

✓ إذا كان جداء ميلي مستقيمين يساوي -1 ، فهما متعامدين .

مثال 2:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ نعتبر النقط $A(4;2)$ و $B(2;-1)$

و المستقيم (D) ذي المعادلة $y = -\frac{2}{3}x + 1$

1) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2) إستنتج أن المستقيمين (AB) و (D) متعامدان .

الحل:

1) لنحسب الميل أولا $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

إذن معادلة المستقيم (AB) تكتب : $y = \frac{3}{2}x + p$

لنحدد p : بما أن النقطة $A(4;2)$ تنتمي الى المستقيم (AB) فإن

$2 = 4 \times \frac{3}{2} + p$ إذن $2 = 6 + p$ و منه $p = -4$

و بالتالي المعادلة المختصرة ل (AB) هي : $(AB):\ y = \frac{3}{2}x - 4$

2) لدينا ميل (AB) هو $\frac{3}{2}$ وميل (D) هو $-\frac{2}{3}$

وبما أن $-\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$ فإن $(AB)\perp(D)$

3 coll

معـــادلة مستقيـــم

I. المعادلة المختصرة لمستقيم :

تعريف

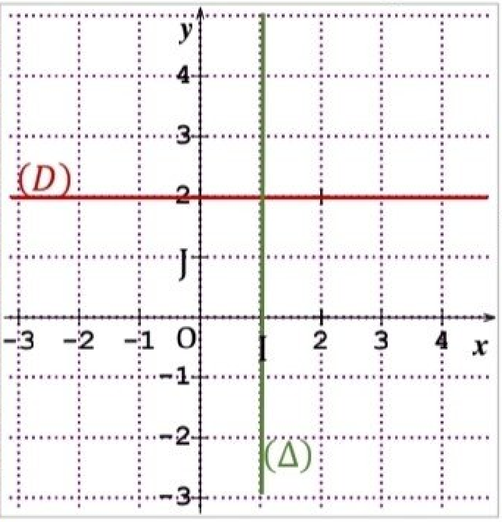
المعادلة المختصرة لمستقيم (D) هي : $y = ax + p$

a: يسمى الميل أو المعامل الموجه أو معدل التغير.

p : يسمى الأرتوب عند الأصل.

مثال :

- ✓ (D) : $y = 2x - 3$ هي معادلة مختصرة للمستقيم (D) الذي ميله $a = 2$ و أرتوبه عند الأصل هو $p = -3$
- ✓ (Δ): $y = -x$ هي معادلة مختصرة للمستقيم (Δ) الذي ميله $a = -1$ و أرتوبه عند الأصل هو $p = 0$



حالة خاصة :

- ✓ (D): $y = 2$ هي معادلة للمستقيم (D) المار بالنقطة $A(0; 2)$ و يوازي محور الأفاصيل.
- ✓ (Δ): $x = 1$ هي معادلة للمستقيم (Δ) المار بالنقطة $I(1; 0)$ و يوازي محور الأراتيب.

II. إنشاء مستقيم معرف بمعادلته :

نعتبر المستوى المنسوب الى المعلم م.م $(o.i.j)$

لننشئ المستقيم (AB) الذي معادلته : (AB): $y = -2x + 3$

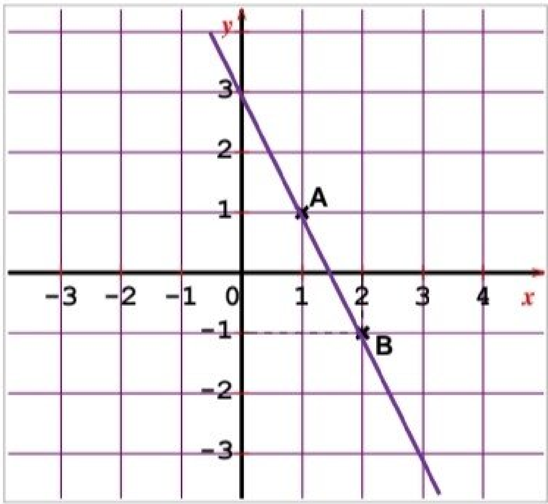
بحيث $A(1; y_A)$ و $B(2; y_B)$

نعوض أفصول A و B في معادلة المستقيم (AB)

$$y_A = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$y_B = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

x	y	
1	1	$A(1; 1)$
2	-1	$B(2; -1)$



III. تحديد معادلة مستقيم :

خاصية

إدا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;;y_B)$ نقطتين بحيث $x_A \neq x_B$

فإن ميل المستقيم (AB) هو : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

مثال :

لتكن $A(-1;-3)$ و $B(-4;0)$

1) حدد ميل المستقيم (AB) .

2) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) .

الحل :

1)
$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-3)}{-4-(-1)}=\frac{0+3}{-4+1}$$
$$=\frac{3}{-3}=-\frac{3}{3}=-1$$

2) لدينا المعادلة المتخختصرة ل (AB) تكتب على شكل : $(AB):\ y=ax+p$

إذن $y=\ -1x+p$

لنحدد p : بما أن النقطة $B(-4;0)$ تنتمي الى المستقيم (AB) فإن

$0=-1\times(-4)+p$ إذن $0=4-p$ و منه $p=-4$

و بالتالي المعادلة المختصرة ل (AB) هي : $(AB):\ y=\ -x-4$

IV. توازي و تعامد مستقيمين:

1) شرط توازي مستقيمين:

خاصية

- ✓ يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل .
- ✓ إذا كان لمستقيمين نفس الميل, فهما متوازيان .

مثال 1:

$$\begin{cases}(D_1): y=-2x+1\\ (D_2): y=-2x+5\end{cases}$$

لدينا (D_1) و (D_2) لهما نفس الميل إذن فهما متوازيان .

الاسبوع السابع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة علم المثلثات هو فهم العلاقة بين زوايا واضلاع المثلث واستخدام هذه العلاقة لحل المشكلات المختلفة سواء كانت في الرياضيا البحتة او في التطبيقات العلمية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

المثلثات بعض القوانين المهمة في النسب المثلثية

ملخص محاضرة العلاقات الهندسية للمثلثات (شرح وتعقيب) ....أعداد م.هدى داود نجم السعد

العلاقات الهندسية للمثلث غير قائم الزاوية:

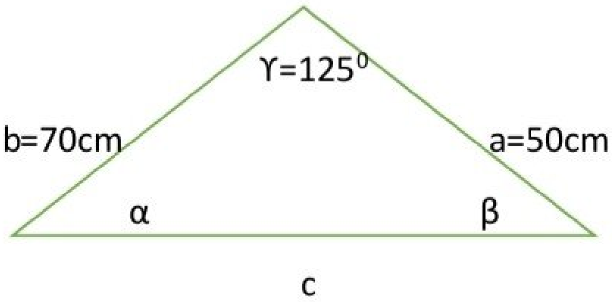
1- قاعدة جيب تمام (حساب طول ضلع بمعلومية الضلعين الأخرين والزاوية التي ينهما):-

مثال1 / جد طول الضلع c أذا علمت أن :

B= 70 سم

A = 50 سم

الزاويه كاما $\Upsilon = 125^0$



يمكن من خلال المعطيات وأستخدام قاعدة جتا cos أستخراج طول الوتر c = ؟ بمعلومية ضلعين وزاويتهما :-

1- تطبيق القانون الضلع المجهول ^{2} = الضلع المعلوم الاول ^{2} + الضلع المعلوم الثاني^2 – 2 × الضلع الاول ×الضلع الثاني ×(جتا الزاوية المحصورة بينهما)

$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos \Upsilon)$

التطبيق يكون بالحاسبة العلمية مباشرة

2- بعد تحويل وكتابة القيم على القانون

$C^2 = 50^2 + 70^2 - \underline{2 \times 50 \times 70 (\cos 125)}$

نبداء من يمين المعادله

أي كتابة 125 ثم ننقر cos ثم× 70 ×50×2 ثم يطرح من 7400 الذي هو حاصل ضرب(50×50 +70×70)

يكون الناتج – 11415.03505 (يكون الناتج سالب ...أن أجراء العملية بخطواتها على الورق يتيح المجال لظهور اشارتي السالب للطرفين في المعادلة ومن المعلوم ان السالب مع السالب يقلب العملية الى الموجب،وهنا وباستخام الحاسبة ننقر على الرمز+/- للتخلص من السالب) فيكون الناتج :-

$C^2 = 11415.03505$

$C = \sqrt{11415.03505} = 106.841$ cm

قمنا بجذر الرقم للتخلص من تربيع الوتر c= فيكون الناتج 106.841 سم

خطوات مهمه عند أستخدام الحاسبة(سواء حاسبة الهاتف أو الحاسبة العلمية):

لأستخراج أي عملية يكتب الرقم ثم العملية المراد تطبيقها :

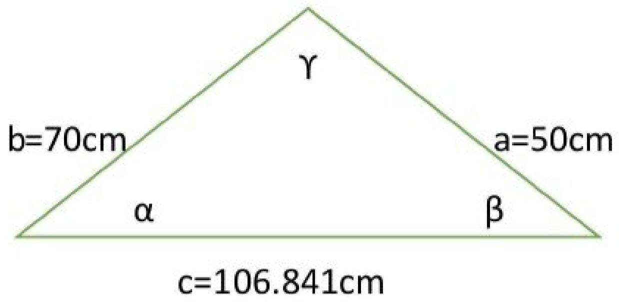
مثلا – (cos 125) نكتب الرقم 125 ثم ننقر على مختصر cos في الحاسبة فيكون الناتج 0.57357-

- ومربع 50 مثلا أما الرقم في نفسه 50×50 أو نكتب 50 ثم ننقر x^2 فيكون الناتج 2500 .

- وكذلك عند أستخراج الجذر نكتب الرقم ثم ننقر على رمز الجذر المطلوب مرفوع للقوة 2 أو3 أو رقم أخر $\sqrt{\ }$ أو $\sqrt[3]{\ }$ ...الخ

يمكن تطبيق قاعدة جتا أيضا في اسخراج قيمة الزاوية المحصورة بين الضلعين أذا كان هي مجهوله...

مثل2 / على فرض أن الزاويه كاما ϒ هي مجهوله في المثال السابق وأن طول الضلع a= 50 سم و الضلع b= 70 سم والوتر c= 106.841 سم (حسب ما أستخرج بالمثال الاول)



يمكن تطبيق المعادلة مع تغيير المطلوب وهو استخراج الزاويه ϒ: يكون التطبيق على الحاسبة وبالخطوات التالية:

1- كتابة القانون الذي تغير بحسب المطلوب $\cos\Upsilon=a^2+b^2-c^2/2xaxb$

حيث أن المطلوب هو اسخرج الزاويه كاما(ϒ)=الضلع aتربيع يجمع مع الضلعb تربيع – الضلع cتربيع ويقسم المجموع على مضروب 2xaxb

$\text{Cos}\ \Upsilon= 50^2+70^2\_c^2/2x50x70$

$\cos\Upsilon= 7400^{(50x50+70x70)}\_11415.99^{(106.841x106.841)}/7000^{(2x50x70)}$

هذه الارقام الصغيره هي للتدلييل على الرقم المستخرج ومن اجل الفهم فقط.أذ يمكن كتابة الخطوة الاولى مباشره على الحاسبة واستخراج الرقم ،اشارة السالب مهمه كونها جائت من طرح الكبيرمن الصغير:

$\cos\Upsilon=-4014.99/7000$

= -0.57357

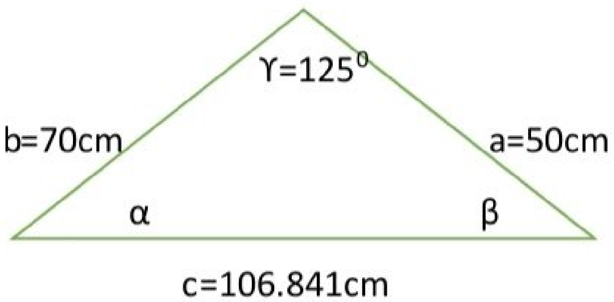
في هذه الحاله نحول الحاسبة عن طريق shift هذا في الحاسبات العلمية أو 2^{nd} في حاسبة الهاتف من أجل الوصول الى مختصر $\cos^{-1}$ وننقر عليه للحصول على الناتج :-

وهو 124.99 وبالتقريب = 125^0 أي ان الزاوية $\Upsilon=125^0$ وهي كما كانت في المثال الاول.

2- قاعدة الجيب (وتستخدم لحساب زاويه بمعلومية ضلعين وزاوية مقابله لاحدهما):حيث يمكن أن تكون علاقة جا sin بين الزاويه والضلع المقابل لها:

$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\Upsilon$ أي الضلع a مقسوم على جا الزاويه الفا α لانها مقابله له ويساوي الضلع b مقسوم على جا الزاويه بيتا β ويساوي الوتر c مقسوم على جا الزاويه كاماϒ.

في هذه الحالة يكون لدينا زاويه مجهولة وضلعين معلومين وزاويه معلومه تكون مقابله لاحد الضلعين.



مثل 3/في المثلث لدينا زاوية ألفا α مجهوله ولدينا معلومية الضلع المقابل لها a=50 cm والضلع c=106.841cm والزاويه كاما$\Upsilon=125^0$

ستكون العلاقة بحسب المعطيات الموجودة :

$a/\sin\alpha = c/\sin\Upsilon$

$50/\sin\alpha = 106.841/\sin 125^0$

هنا يكون التاكيد على المعطيات المعلومه للمثلث حيث إن المجهول الوحيد في هذه العلاقة هو الزاوية ألفاα وبحسب قاعدة حاصل ضرب الطرفين x تكون عملية التبادل للاطراف :

$\sin\alpha = 50 \times \sin 125^0/106.841$

$\sin\alpha = 0.383350982$

وبنفس الخطوات بالحاسبة نكتب 125 ثم sin ثم نضرب ×50 ونقسم على 106.841

0.383350982 $\sin^{-1}$

هنا خطوه مهمه وهي تكتب الناتج ثم ننقر sin^{-1} والذي يمكن أيجادة بعد تحويل الحاسبه (راجع الملاحظات السابقة الخاصة بتحويل الحاسبة) من أجل تحديد الزاويه

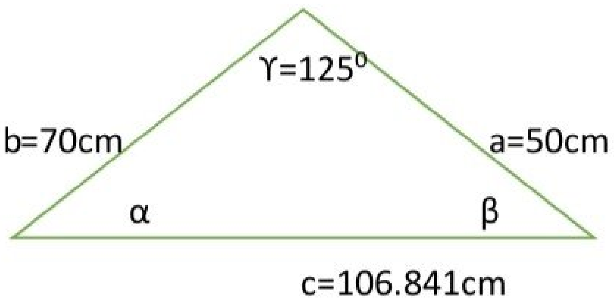
$= \underline{22}^0.541$

$0.541x\ 60 = \underline{32}'.46$

$0.46x60 = \underline{27}''.6$

بعد أيجاد قيمة الزاوية ألفا α بحسب الخطوات اعلاه يمكننا وكما درسنا أيجاد الدقائق والثواني للزاويه بعد معرفة أن الزاويه من النظام الستيني. الزاويه $\alpha = 22^0\ 32'\ 27''$

3- المساحة :- في الهندسة الرياضية تمثل مساحة المثلث بقانون ½ ×القاعدة×الارتفاع ، والقاعدة هي أحد الاضلاع ، والارتفاع هو العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة أو على أمتدادها.وفي حال توفرت المعطيات كلها يمكن أستخراج المساحة.



عند النظر الى الشكل نلاحظ انه توجد اطوال الاضلاع لكن نحتاج الارتفاع

- بمعلومية أطوال الاضلاع : نحتاج هنا أيجاد نصف محيط المثلث والذي يستخرج عن طريق مجموع (أطوال اضلاعة الثلاثة) مقسومة على 2 :

$h=a+b+c\ /2$

$h= 50+70+106.841\ /2 =113.4205\ cm$

113.4205cmهذا يمثل نصف محيط المثلث

ثم تطبق المعادلة التالية لحساب مساحة المثلث وهي :

$A= \sqrt{h}(h-a)(h-b)(h-c)$

الجذر يشمل كل الاطراف وبما أن $h = 113.4205$

$A= \sqrt{113.4205(113.4205-50)(113.4205-70)(113.4205-106.841)}$

$A=1433.522cm^2$

مساحة المثلث .والمساحة تكون مربعة .

- يمكن أستخراج المساحة بمعلومية ضلعين والزاوية بينهما:

وهنا بحسب معطيات المثلث السابق أذا أعتبرنا أن قيمة الضلع c غير موجوده ولدينا فقط الضلع a و b والزاوية كاماϒ معلومين فيكون التطبيق كالاتي :

$A=1/2x \ a \ x \ b \ x \ \sin ϒ$

(ملاحظة عند استخدام الحاسبة يمكن كتابة 0.5 بدل ½ فهما نفس القيمة وهذا لتسهيل الكتابة على الحاسبة لاتمام كتابة الارقام)

$A=1/2 \ x50 \ x70 \ x \ \sin 125^0 = 1433.516 \ cm^2$

وهي مقاربه للمساحة التي استخرجت بالخطوات التي قبلها(بمعلومية أطوال الاضلاع)

أرجوا قراءة هذا الملخص مع الملزمه لفهم العلاقات الهندسية للمثلثات غير القائمة الزاويه ،أذ تمثل كل الارقام التي تمثلت في الامثلة من أجل فهم كيفية تطبيق العلاقات (هي للشرح فقط).

الاسبوع الثامن

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة

الهدف من دراسة علم المثلثات هو فهم العلاقة بين زوايا واضلاع المثلث واستخدام هذه العلاقة لحل المشكلات المختلفة سواء كانت في الرياضيا البحتة او في التطبيقات العلمية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

حل المثلث بعض القوانين المستخدمة في حل المثلثات

*في المثلث ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا **ومجموع الزوايا يساوي 180** , في المثلث القائم الزاوية احدى الزوايا 90 ومجموع الزاويتين الاخريتين مجموعهما 90

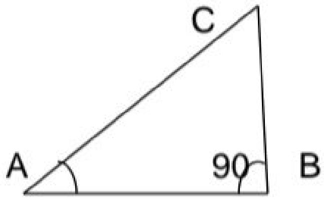
نظرية فيثاغورس:في مثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي طولي الضلعين المحاذيين للزاوية القائمة يساوي مربع طول الوتر

$/ac/^2=/ab/^2 +/ bc/^2$

١-الضلع CA المقابل للزاوية B يسمى الوتر

٢-الضلع AB المقابل للزاوية C

٣-الضلع BC المقابل للزاوية A



- جاA ----جيب الزاوية ----- sin a --- sina=

-جتاA ----جيب تمام الزاوية cos a

-ظا A ----ظل الزاوية tan a

-ظتا A---ظل تمام الزاوية cot b

-قا A----قاطع الزاوية sec b

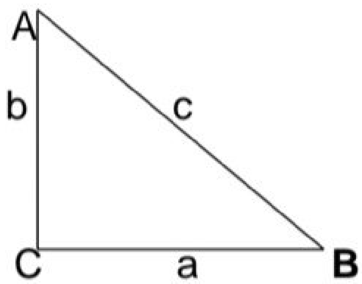
- قتا B---قاطع تمام الزاوية cosc b

sina= bc/ac cosa =ab/ac tana=cb/ab cota= ab/cb seca=$\frac{ac}{ab}$ cosc=$\frac{ac}{bc}$

العلاقات بين النسب المثلثية:

sin a .cos a=1 , cos a. sec a=1 , tan a . cot a=1 , tan a= $\frac{sina}{cosa}$, cot a= $\frac{cosa}{sina}$

الزاوية المتممة:



في المثلث ABC القائم الزاوية في c و (90 = <A+<B) ،مجموع الزوايا الداخلية للمثلث تساوي 180

الزاوية B تتمم الزاوية A و بالعكس ، الزاوية A تتم الزاوية B لانهما مجموع الزوايا 90

sin B= b/c =cos A=Cos (90-B) , Cos B =a/c=Sin A =sin (90-B)

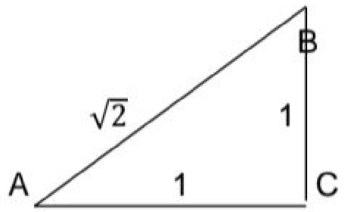
Tan B=b/a=Cot A=cot(90-B) , Cot B =a/b =Tan A=tan (90-B)

Sec B=c/a= Cosc A=Sec (90-B) , Cosc B=c/b =Sec A =Cosc (90-B)

ومن هذا يمكن تمثيل اي نسبة مثلثية بدلالة تمامها

Sin30 =Cos60 , Sec 30 =Cosc 60 , tan42 =Cot 48

النسبة المثلثية لزوايا خاصة



الزوايا الخاصة هي (صفر ،30 ،45 ،60 ، 90)

- الزاوية 45

لاحظ النسب

$\sin 45 = 1/\sqrt{2}$,$\cos 45 = 1/\sqrt{2}$,$\tan 45 = 1$

$\cot 45 = 1$, $\sec 45 = \sqrt{2}$, $\csc 45 = \sqrt{2}$

- الزاوية 30- 60

$\sin 30 = 1/2 = \cos 60$, $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60$, $\tan 30 = 1/\sqrt{3} = \cot 60$

-الزاوية (90- 0)

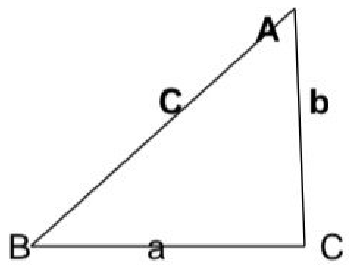
$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\cot 0 = \infty$ $\tan 0 = 0$, $\sec 0 = 1$, $\csc 0 = \infty$

$\sin 90 = 1$, $\cos 90 = 0$, $\tan 90 = \infty$, $\cot 90 = 0$, $\sec 90 = \infty$, $\csc 90 = 1$

مثال : جد ناتج مايأتي بتعويض قيم النسب المثلثية فيما يأتي : ص ٣١

$5\cos 60 - 3\sin 30 + 2\tan 45$, $7\tan 30 - \cot 45 + \cos 0 - 7\cot 60$

مساحة المثلث القائم الزاوية :



في المثلثABC القائم الزاوية في C اذا فرضنا الضلع AC=b والضلع AB=c والضلع BC=a والمساحة K

القوانين

1-$K = 1/2\, ab = 1/2\, ac \cos A = 1/2 bc \sin A$

2-$K = b^2 \tan A = 1/2 a^2 \tan B$

3- $K = 1/2 C^2 \sin A$ Coa $A = 1/2\, C^2 \sin B \cos B$

مثال : جد مساحة المثلث القائم الزاوية الذي فيه وتر يساوي ٢٠ وحدة طول احدى زواياها الحادة تساوي 60 درجة

الحل

$K = 1/2\, C^2 \sin A \cos A = 1/2(20)^2 . \sin 60 . \sin 60 = 50\sqrt{3}$

قوانين اساس في المثلثات:

$Sin^2\Phi + Cos^2\Phi = 1$ -------(1)

$Tan^2\Phi + 1 = Sec^2\Phi$ -------(2)

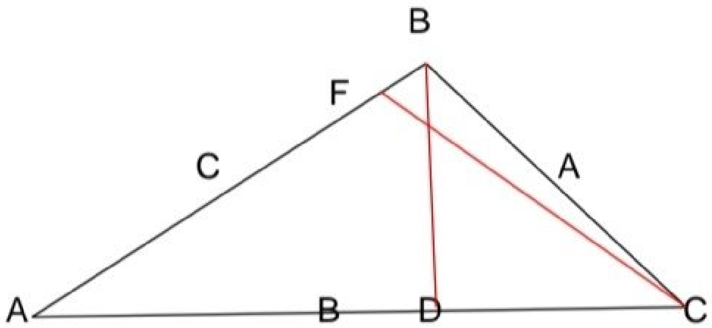
بعض القوانين المستخدمة في حل المثلثات:

- قانون الجيب

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$$

-قانون الجيب تمام

$Cos\ A = \frac{B^2+C^2-A^2}{2BC}$, $Cos\ B = \frac{A^2+C^2-B^2}{2Ac}$, $Cos\ C = \frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$



يمكن حل المثلث بأنزال عمود من احد رؤوسه على الضلع المقابل له لكي نحصل على مثلثات قائمة الزوايا ونستخدم القوانين السابقه في حلها

في المثلث ABD نستنتج ان $Sin\ A = BD/AB$ ويؤدي ان ($BD = AB\ Sin\ A$)

وفي المثلث BDC نستنتج $Sin\ c = BD/BC$ ويؤدي الى ان ($BD = BC\ Sin\ c$) ومن المعادلتين نستنتج

$AB\ SinA = BC\ Sinc$ ويؤدي الى $\frac{AB}{SinC} = \frac{BC}{Sin\ A}$ اي ان $\frac{A}{SinA} = \frac{C}{Sin\ C}$ وهذا قانون الجيوب وبأنزال العمود CF على AB ومن المثلثين القائمين BCF, AFC نستنتج $\frac{A}{Sin\ A} = \frac{B}{Sin\ B}$

اذن قانون الجيوب

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$$

والان نستنتج قانون الجيب تمام

$C^2 = BD^2 + AD^2$ فيثاغورس

$BD^2 + (B-DC)^2 =$

$BD^2 + B^2 - 2BDC + DC^2 =$

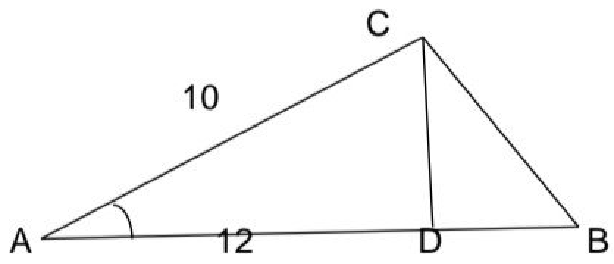
بما انِ $A^2 = BD^2 + DC^2$ ، $DC = A\ Cos\ C$

اذن $C^2 = A^2 + B^2 - 2BA\ Cos\ C$

وبنفس الطريقة نستنتج

Cos A=$\frac{B^2+C^2-A^2}{2BC}$, Cos B=$\frac{A^2+C^2-B^2}{2Ac}$, Cos C=$\frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$

مثال :في الشكل المجاور $A=30^\circ$, AB=12cm, AC=10cm



المطلوب حل المثلث

الطريقة الاولى ننزل CD عمودي على AB

cd=10 Sin 30=5cm

ad=10 Cos 30=8.66cm

اذن db=12-8.66=3.34

tan b=cd/bd=1.497=56

c=180-30+56=93

$BC^2=(3.34)^2+(5)^2$=6.02cm

الحل بطريقة ثانيه:القانون

تمارين ص ٤٩ من كتاب الرياضيات التطبيقيه

الاسبوع التاسع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة علم المثلثات هو فهم العلاقة بين زوايا واضلاع المثلث واستخدام هذه العلاقة لحل المشكلات المختلفة سواء كانت في الرياضيا البحتة او في التطبيقات العلمية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تمارين متنوعة في حل المثلث)

تمارين صفحة ٤٩ من كتاب الرياضيات التطبيقية

الاسبوع التاسع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة علم المثلثات هو فهم العلاقة بين زوايا واضلاع المثلث واستخدام هذه العلاقة لحل المشكلات المختلفة سواء كانت في الرياضيا البحتة او في التطبيقات العلمية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تمارين متنوعة في حل المثلث)

القطاع الدائري:

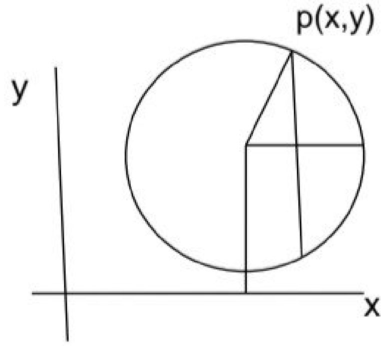
نفرض (h,k) نقطة ثابته تمثل مركز الدائرة وان p (x,y) نقطة متحركة وتبعد عن المركز المسافة r بأستخدام قانون المسافة بين نقطتين ينتج المعادلة التالية (المعادلة العامة للدائرة)

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

علما ان كل من r,h,k كميات ثابته

اذا فرضنا h=0, k=0 تنتج المعادلة التالية

$x^2+y^2=r^2$ معادلة الدائرة مركزها نقطة الاصل



مثال: جد معادلة الدائرة التي مركزها (4,-3) ونصف قطرها 6

الحل:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-4)^2+(y+3)^2=36$

*يمكن القول ان اي معادلة من الدرجة الثانية تمثل معادلة الدائرة بشرط ان الحد xy محذوف ومعامل x^2 يساوي معامل y^2

مثال: جد مركز ونصف قطر الدائرة ل

$2x^2+2y^2-8x+5y+8=0$

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4=0$ بأضافة ١٦/٢٥ للطرفين

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}$

$x^2-4x+4+y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}$

$(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2=\frac{25}{16}$

اذن المركز (2,5/4) ونصف القطر 5/4

الزاوية الدائرية:

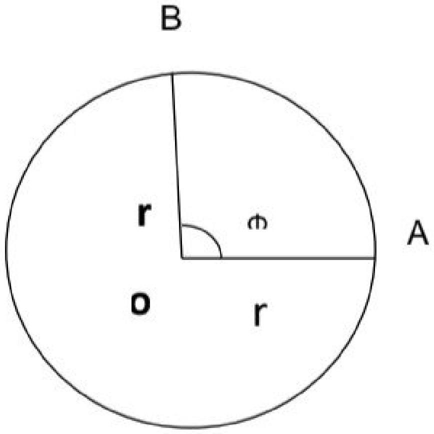
وهي الزاوية التي يقع رأسها في المركز والضلعان الاخران هما انصاف اقطار الدائرة الزاويةΦ=الزاوية AOB اذن الزاوية Φ=1 زاوية نصف قطرية

*لتحويل الدرجات الى زوايا نصف قطرية نضرب عدد الدرجات ب ¶/180 ولتحويل الزوايا النصف القطرية الى درجات نضرب عدد الزوايا النصف القطرية ب 180/¶

طول القوس (على محيط الدائرة)

arc AB=r. Φ (Φ radian)

القاعدة : طول القوس AB يساوي حاصل ضرب نصف قطر الدائرة في مقدار المركزية بالتقدير الدائري



مثال :جد طول القوس الذ يصنع زاوية مقدارها 10° في دائرة نصف قطرها 12 قدما

الحل : نحول 10 الى تقدير دائري

10*¶/180=¶/18

AB=r . Φ =¶/18 . 12= 2¶/3

مثال :جد طول القوس المقابل للزاوية المركزية 48° درجة ونصف قطرها 10 قدم ؟

القطاع الدائري:

القطاع الدائري: هو جزء من سطح الدائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس

مساحة القطاع ومساحة القطعة :

Sin a=y/1 ---y=Sin a , Cos a=x/1----x=Cos a. ---- b(x,y) =(Cos a, sin y)

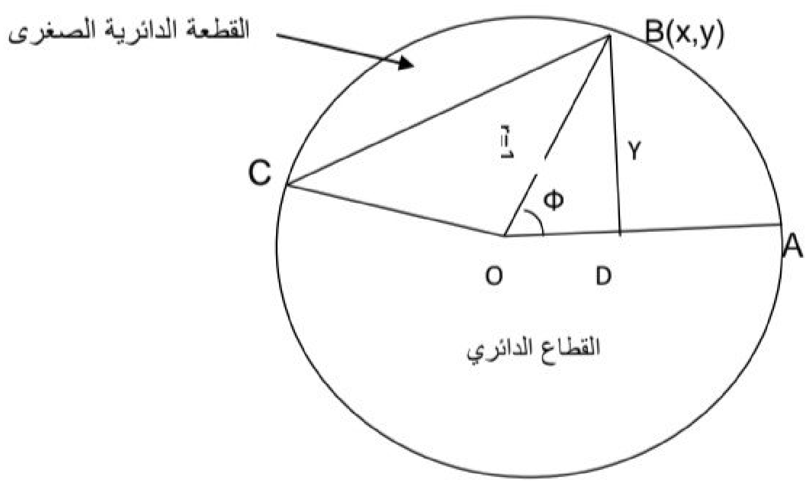
مساحة القطاع AOB

sector (AOB=1/2 Φ r^2)

مساحة القطعة BA=مساحة القطاع - مساحة المثلث OAB

القطعة الدائرية: هي جزء من سطح الدائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بها يوازي ذلك القوس

مساحة القطعه = 1/2 r^2{Φ-Sin Φ} ، (Φ بالتقدير الدائري ، sin Φ بالدرجات)



مثال :جد مساحة القطعة لدائرة نصف قطرها ٦ قدم وزاويتها ٤٠ درجة ؟

الحل:

مساحة القطعة= $1/2\ r^2\ \{\Phi\text{-}Sin\ \Phi\} = 1/2\ (6)^2\{40\ *(¶/180)\text{-}\ Sin\ 40\}=0.996$ قدم^2

مثال٢/ماهي مساحة قطاع زاويته المركزية (36) درجة ونصف قطر دائرته 8 قدم

Sector area مساحة القطاع = $1/2\ \Phi\ r^2 = 1/2\ 36\ *¶/180*64=20.102$ قدم ^{2}

مثال/جد نصف قطر الدائرة التي فيها القوس طوله 4 قدم وزاويته (1.5 R)

length of arc $=r\Phi$, $4=r\ (1.5)$, $r=4/1.5=2.666$ قدم

الاسبوع الحادي عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة المشتقات الدوال متعددة الحدود والدوال الضمنية الى فهم سلوك الدوال وتطبيقاتها في مجالات متنوعة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

المشتقات الدوال متعددة الحدود والدوال الضمنية

المشتقات The Derivatives

تعريف:

المشتقة للدالة f هي دالة، يرمز لها f' ، بحيث أن قيمتها في كل عدد x في منطلق f معطاة بـــ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة لــ x . وهناك رموز أخرى تستعمل لمشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة الى x ، وهي $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, y' .

قد يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a ، وعندئذ تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال أن الدالة قابلة الأشتقاق differentiable في a ، كما قد يحدث خلاف ذلك، أي قد لا يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في a لعدم وجود الغاية، وفي هذه الحالة يقال أن الدالة غير قابلة الأشتقاق في a .

ويقال أن الدالة $f(x)$ قابلة الأشتقاق في الفترة I أذا كانت قابلة الأشتقاق في كل عدد x في I وقد تكون الدالة قابلة الأشتقاق في كل نقاط منطلقها.

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x بأستعمال التعريف نتبع الخطوات الاتية:

1) نحسب $f(x + \Delta x)$
2) نحسب الفرق $f(x + \Delta x) - f(x)$
3) نحسب المقدار $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ نحسب الغاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

مثال: جد مشتقة الدالة بأستعمال التعريف

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

ثم أستعمل النتيجة لأيجاد قيمة المشتقة في $x = 3$ (أي أيجاد $f'(3)$) .

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2$$

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - (x^2 + 3x - 2)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - x^2 - 3x + 2$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x + 3) = 2x + 0 + 3$$

$$= 2x + 3$$

لذلك، فأن هذه الدالة قابلة الأشتقاق في $\mathbb{R}$.

قيمة المشتقة في $x = 3$ ، هي

$$f'(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9.$$

ملاحظة: يرمز ، في بعض الأحيان، لقيمة المشتقة للدالة $f(x)$ في $x = \mathrm{a}$ بالرمز

$$f'(x)|_{x=\mathrm{a}}$$

مثال: لتكن $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ ، حيث أن a , b ثابتان (أي $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$). جد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = \mathrm{a}\,(x+\Delta x) + \mathrm{b} = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b} - (\mathrm{a}x + \mathrm{b}) = \mathrm{a}\,\Delta x$$

لذلك، فأن

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{a}\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{a} = \mathrm{a}.$$

مثال: لتكن $f(x) = \sqrt{x}$، حيث $x \geq 0$. جد $f'(x)$ عندما $x > 0$.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

ولأجل حساب هذه الغاية نضرب البسط والمقام في مرافق البسط، الذي هو $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\Delta x} - x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x+0} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بشرط $x > 0$. لاحظ أن المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$.

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ وبين أنه لا توجد مشتقة عندما $x = 2$.

الحل:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x-2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2) - (x+\Delta x-2)}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{x - 2 - x - \Delta x + 2}{(x+\Delta x-2)(x-2)} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

وهكذا، يكون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot (x+\Delta x-2)(x-2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

واضح أن $f'(x)$ موجودة لكل قيم x الحقيقية ما عدا $x = 2$.

مبرهنة: أذا كانت f دالة قابلة الأشتقاق في a ، فأن f مستمرة في a .

المثال الاتي يبين أن عكس هذه المبرهنة غير صحيح دائماً، أي قد تكون الدالة f مستمرة في العدد a ولكن مشتقتها في a غير موجودة.

مثال: تأمل دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$. هذه الدالة مستمرة في $x = 0$ وقيمتها تساوي صفراً، ولكن مشتقتها عند هذه النقطة غير موجودة، كما مبين في الاتي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

لذلك، فأن

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

فأذا كانت $\Delta x > 0$ ، فأن $f'(0) = 1$ ، وأذا كانت $\Delta x < 0$ ، فأن $f'(0) = -1$. لذلك فأن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى عندما $\Delta x \to 0$. وعليه، فأن هذه الغاية غير موجودة، أي $f'(0)$ ، غير موجودة.

بعض قوانين الأشتقاق

يطلق على عملية أيجاد مشتقة دالة ما التفاضل differentiation ، ولكن عملية التفاضل هذه مطولة ومملة وخاصة عندما تكون الدالة معقدة. لذلك وجب وضع قواعد وقوانين تسهل أجراء عملية التفاضل.

مبرهنة: أذا كان $f(x) = \mathrm{c}$ لكل x ، حيث c ثابت حقيقي، فأن $f'(x) = 0$. أي مشتقة الثابت تساوي صفراً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 7$ ، فأن $f'(x) = 0$ وأذا كانت $f(x) = -5$ ، فأن $f'(x) = 0$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ ، فأن $f'(x) = \mathrm{n}\, x^{\mathrm{n}-1}$.

مثال: اذا كانت $f(x) = x^3$ ، فأن $f'(x) = 3x^2$ وأذا كانت $f(x) = x^5$ ، فأن $f'(x) = 5x^4$

مبرهنة: أذا كان c ثابتاً وكانت f دالة قابلة الأشتقاق، فأن $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c} \cdot f(x)] = \mathrm{c}\, f'(x)$.

مثال: اذا كانت $f(x) = 3x^6$ ، فأن $f'(x) = 3(6)\, x^5 = 18\, x^5$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\, f(x) \pm \mathrm{g}(x)\,] = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

ويمكن أن نكتب قاعدة الاشتقاق المتضمنة في هذه المبرهنة كالاتي:

$$(f \pm \mathrm{g})'(x) = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

أذا كانت

$$f(x) = \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-1} + \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-2} + \cdots \mathrm{a_1}\, x + \mathrm{a_0}$$

متعددة حدود، فأن

$$f'(x) = \mathrm{n}\, \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}-1} + (\mathrm{n}-1)\, \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-2} + (\mathrm{n}-2)\, \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-3} + \cdots + \mathrm{a_1}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x - 4$ ، فأن

$$f'(x) = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{d}{dx}[\, f(x) \cdot g(x) \,] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

or

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

مثال: أذا كانت $f(x) = (3x - 2) \cdot (4x + 1)$ ، فأن

$$f'(x) = (3x - 2) \cdot (4) + (4x + 1) \cdot (3) = 12x - 8 + 12x + 3$$

$$= 24x - 5$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، وأن $g(x) \neq 0$ ، فأن

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = \frac{8\,x^7}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$f'(x) = \frac{(2x - 1) \cdot (56\,x^6) - (8\,x^7) \cdot (2)}{(2x - 1)^2} = \frac{112\,x^7 - 56\,x^6 - 16\,x^7}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{96\,x^7 - 56\,x^6}{(2x-1)^2}$$

مثال: لتكن

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 9}\ ,\ x \neq 9$$

فأن

$$f'(x) = \frac{(x - 9) \cdot (2\,x - 2) - (x^2 - 2x + 5) \cdot (1)}{(x - 9)^2}$$

$$= \frac{2\,x^2 + 18 - 18\,x - 2x - x^2 + 2x - 5}{(2x - 1)^2} = \frac{x^2 - 18\,x + 13}{(2x - 1)^2}$$

مثال: لتكن $g(t) = \frac{t^2}{t^2-4}$ ، أوجد قيمة $\frac{dg}{dt}$ عندما $t = 0$ ، $t = 1$.

الحل:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{(t^2-4)\cdot(2\,t) - (t^2)\cdot(2\,t)}{(t^2-4)^2} = \frac{2\,t^3 - 8\,t - 2\,t^3}{(t^2-4)^2} = \frac{-8\,t}{(t^2-4)^2}$$

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \quad , \quad \frac{dg}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{-8}{9}$$

مثال: لتكن $y = f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{(2x-1)\cdot(0) - (1)\cdot(2)}{(2x-1)^2} = \frac{0-2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{-n}$ ، فأن $f'(x) = -n\,x^{-n-1}$

مثال: أذا كانت $f(x) = x^5 - 3x^{-2} + 2x^{-3} + 1$ ، فأن

$$f'(x) = 5x^4 - 3(-2)x^{-2-1} + 2(-3)x^{-3-1} + 0 = 5x^4 + 6\,x^{-3} - 6\,x^{-4}$$

يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل الحالات التي يكون فيها الأس عدداً نسبياً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ ، أي أن $f(x) = 5\,(x)^{\frac{1}{3}}$ ، فأن

$$f'(x) = 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}\,(x)^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

مبرهنة: أذا كانت $y = [\,f(x)\,]^n$ ، حيث أن n عدد صحيح وأن $f(x)$ دالة قابلة للأشتقاق، فأن

$$\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

مثال: لتكن $y = 2\,(3\,x^2+5)^4 - 3\,(x^2+3x-2)^{-5}$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = 2\,(4)(3\,x^2+5)^3 \cdot (6\,x) - 3(-5)(x^2+3x-2)^{-6} \cdot (2\,x+3)$$

$$= 48\,x\,(3\,x^2+5)^3 + 15\,(x^2+3x-2)^{-6} \cdot (2\,x+3)$$

مثال: لتكن $y = 4\,(2\,x^2+3\,x-2)^2$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = 4\,(2)(2\,x^2+3\,x-2)^{2-1} \cdot (4\,x+3)$$
$$= 8\,(2\,x^2+3\,x-2) \cdot (4\,x+3)$$

مشتقة الدالة المركبة . قاعدة السلسلة The Chain Rule

مبرهنة: لتكن $y = f(\mathrm{u})$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى u ، ولتكن $\mathrm{u} = \mathrm{g}(x)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن الدالة المركبة $y = (f \circ \mathrm{g})(x)$ قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x وأن

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ أذا كانت $y = (\,x^2+5\,x-3)^6$.

الحل: نفرض أن $\mathrm{u} = x^2+5\,x-3$ ، عندئذ تكون $y = \mathrm{u}^6$. ومنها نحصل على

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x} = 2x+5 \quad , \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} = 6\,\mathrm{u}^5$$

وبموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x} = 6\,\mathrm{u}^5 \cdot (2x+5) = 6(x^2+5\,x-3)^5 \cdot (2x+5)$$

مثال: أذا كانت $\mathrm{u} = x+3 \quad , \quad y = \mathrm{u}^2+5\mathrm{u}-1$ ، فجد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x} = (2\mathrm{u}+5) \cdot (1) = 2\,\mathrm{u}+5$$

بما أن $\mathrm{u} = x+3$ ، فأن

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = 2\,\mathrm{u}+5 = 2(x+3)+5 = 2x+6+5 = 2x+11$$

مثال: أذا كانت $u = 5x^2 \quad , \quad y = u^3 + 2u + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x)$$

بما أن $u = 5x^2$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x) = (3\,(5x^2)^2 + 2) \cdot (10\,x)$$
$$= (75\,x^4 + 2) \cdot (10\,x) = (75x^4 + 2) \cdot (10\,x) = 750\,x^5 + 20\,x$$

مثال: أذا كانت $u = \frac{1}{x+1} \quad , \quad y = 4u^2 + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: أذا كانت $u = 4\,x^2 - 2\,x + 5 \quad , \quad y = u^3$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الدوال الضمنية Implicit Functions

قد تصادفنا في بعض الأحيان علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر مثل

$$x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 3y^3x^2 + 6yx - 5x^2 = 10$$

في مثل هذه المعادلات يصعب أو يتعذر التعبير عن أحد المتغيرات بدلالة الأخر مباشرة، وحتى في حالة أيجاد أحد المتغيرين، مثل y ، بدلالة x ، فأن ذلك يؤدي الى أكثر من دالة واحدة. فأذا أخذنا المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ نجد منها $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ ، وهذه علاقة مكونة من دالتين هما $y = -\sqrt{9 - x^2} \quad , \quad y = \sqrt{9 - x^2}$. ولهذا السبب يطلق على هذه العلاقات دوال ضمنية، لكونها تتضمن دالة واحدة على الأقل ولذلك عند أيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية نعتبر y دالة لــ x ، ونطبق قواعد الأشتقاق المناسبة.

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $x^3 + 4\,y^3 - x\,y^2 + 7\,x = 10$

الحل: نعتبر y دالة للمتغير x ونأخذ المشتقة لكل حد من الحدود بتطبيق القواعد

$$3x^2 + 12\,y^2\frac{dy}{dx} - \left(2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 7 = 0$$

ثم نجمع الحدود المحتوية على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ في طرف واحد، وننقل الحدود الأخرى الى الطرف الثاني.

$$(12\,y^2 - 2\,x\,y)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2 - 7$$

اذاً،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12\,y^2 - 2\,x\,y}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ من الدالة الضمنية $4\,x^2 + 3\,xy - x\,\mathrm{y}^2 = 0$

الحل: كما في المثال السابق،

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right) + 3\mathrm{y} - \left(x\left(2\,\mathrm{y}\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right) + \mathrm{y}^2\right) = 0$$

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right) + 3\mathrm{y} - 2\,x\,\mathrm{y}\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{y}^2 = 0$$

$$(3\,x - 2\,x\,\mathrm{y})\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{y}^2 - 3\,\mathrm{y} - 8\,x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{y}^2 - 3\,\mathrm{y} - 8\,x}{3\,x - 2\,x\,\mathrm{y}}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ من الدالة الضمنية $2\,\mathrm{y} + \sqrt{xy} = 3\,x^3$

الحل:

$$2\,\mathrm{y} + (x\,y)^{1/2} = 3\,x^3 \;\Rightarrow 2\,\mathrm{y} + x^{1/2}\cdot\mathrm{y}^{1/2} = 3\,x^3$$

$$2\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} + x^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{y}^{\frac{1}{2}-1}\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right) + \mathrm{y}^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\right) = 9\,x^{3-1}$$

$$2\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,\mathrm{y}^{\frac{-1}{2}}\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,\mathrm{y}^{1/2} = 9\,x^2$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,\mathrm{y}^{\frac{-1}{2}}\right)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = 9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,\mathrm{y}^{1/2}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,\mathrm{y}^{1/2}}{2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,\mathrm{y}^{\frac{-1}{2}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\,\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{\sqrt{y}}{2\,\sqrt{x}}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2\,\sqrt{y}}}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ من الدالة الضمنية $x\,y = 1$

الحل:

$$x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{y} = 0 \Rightarrow x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{y} \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{-\mathrm{y}}{x}$$

بما أن $\mathrm{y} = \frac{1}{x}$ ، فأن

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{-\mathrm{y}}{x} = \frac{\frac{-1}{x}}{x} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ لكل مما يأتي:

$$x\,\mathrm{y}^3 - 3\,x^2 = x\,\mathrm{y} + 5$$
$$x^2 - 2\,x\,\mathrm{y} + \mathrm{y}^2 = 0$$
$$4\,x^2 + 9\,\mathrm{y}^2 - 36 = 0$$
$$\frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{x} = 1$$

المشتقات من المراتب العليا **Derivatives of Higher Orders**

المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ مشتقة المشتقة الأولى $f'(x)$. ويرمز عادة للمشتقة الثانية للدالة $\mathrm{y} = f(x)$ بأحد الرموز الاتية:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} \quad , \quad f''(x) \quad , \quad \mathrm{y}''$$

وبذلك، فأن

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right)$$

وبالمثل، نعرف المشتقة الثالثة (أن وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية. وهكذا، بالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة، الخامسة، ... الخ.

لتكن $\mathrm{y} = f(x)$ ولنفرض أن f قابلة للأشتقاق n من المرات في المجال $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ ، فيكون لدينا التعريفات الاتية:

$$\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

$$\mathrm{y}'' = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(f'(x))}{\mathrm{d}x} = f''(x)$$

$$\mathrm{y}''' = \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}(f''(x))}{\mathrm{d}x} = f'''(x)$$

$$\mathrm{y}^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^4} = \frac{\mathrm{d}(f'''(x))}{\mathrm{d}x} = f^{(4)}(x)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\mathrm{y}^{(\mathrm{n})} = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{d}\left(f^{(\mathrm{n}-1)}(x)\right)}{\mathrm{d}x} = f^{(\mathrm{n})}(x)$$

مثال: جد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5\,x^3 - 4\,x + 1$

الحل:

المشتقة الاولى $y' = 4\,x^3 + 15\,x^2 - 4$

المشتقة الثانية $y'' = 12\,x^2 + 30\,x$

المشتقة الثالثة $y''' = 24\,x + 30$

مثال: جد y''' للدالة $y = 6x^5$

الحل:

$$y' = 30\,x^4 \quad , \quad y'' = 120\,x^3 \quad , \quad y''' = 360\,x^2$$

مثال: جد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

$$y' = 10\,x^4 + 9\,x^2 + 5 \qquad , \qquad y'' = 40\,x^3 + 18\,x$$

$$y''' = 120\,x^2 + 18 \qquad , \qquad y^{(4)} = 240\,x$$

$$y^{(5)} = 240 \qquad , \qquad y^{(6)} = 0$$

مثال: جد قيمة y'' للدالة الضمنية $x^2\,y + 3y = 4$ في النقطة $(-1,1)$ الواقعة على منحني الدالة.

الحل: نوجد المشتقة الأولى بالاشتقاق الضمني:

$$x^2\,y' + y\,(2x) + 3\,y' = 0 \;\Longrightarrow x^2\,y' + 2\,x\,y\, + 3\,y' = 0$$

نوجد المشتقة الثانية

$$x^2\,y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

لأيجاد قيمة y'' في النقطة $(-1,1)$ ، أي عندما $x = -1$, $y = 1$ ، نحتاج أولاً أيجاد قيمة y' في هذه النقطة، وقيمة y' نحصل عليها من العلاقة الأولى وكالاتي:

$$(-1)^2\,y' + 2\,(-1)\cdot\,(1)\, + 3\,y' = 0 \;\Longrightarrow\; y' + 3\,y' = 2 \Longrightarrow 4\,y' = 2$$

$$y' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

الاسبوع الثاني عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم مشتقات الدوال المثلثية هو فهم كيفية تغير هذه الدوال وتطبيقاتها في مختلف المجالات

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

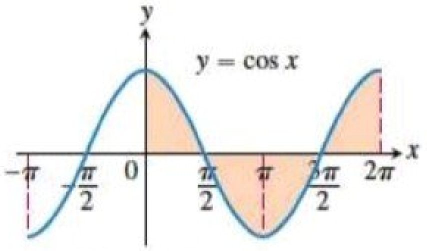
- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

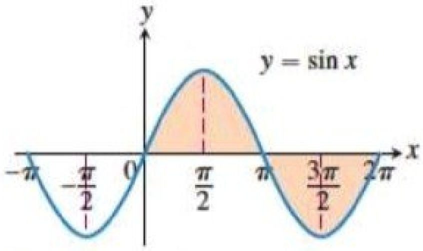
مشتقة الدوال المثلثية

الاسبوع الثالث عشر

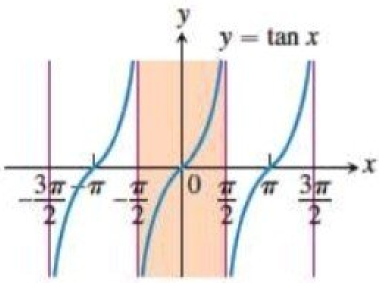
Trigonometric functions الدوال المثلثية



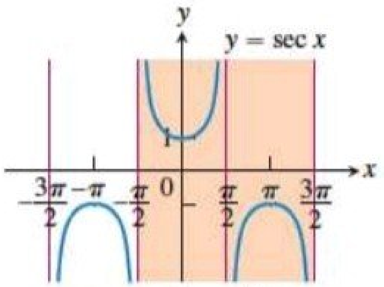
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(a)



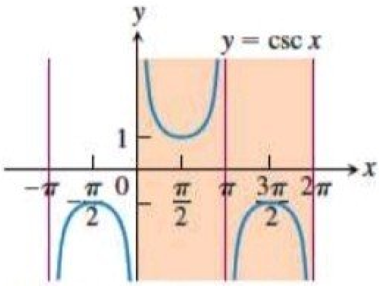
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(b)



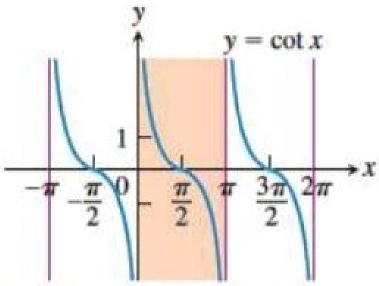
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(c)



Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(d)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(e)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(f)

متطابقات مثلثية :

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$ 2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$ 4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

6. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Period π: $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Period 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$
$\csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\cos(-x) = \cos x$
$\sec(-x) = \sec x$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\csc(-x) = -\csc x$
$\cot(-x) = -\cot x$

مشتقات الدوال المثلثية :

$$1.\ \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\,.\frac{du}{dx} \qquad 2.\ \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\,.\frac{du}{dx}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u.\frac{du}{dx} \qquad 4.\ \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u.\frac{du}{dx}$$

$$5.\ \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u\,.\frac{du}{dx} \qquad 6.\ \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\,.\frac{du}{dx}$$

مثال (٦) جد y' (dy/dx) للدوال التالية :

$$1.\ y = \sin^3\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3} \qquad 2.\ y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

$$3.\ y = \tan^2(\cos x) \qquad 4.\ y = \tan t\ , \quad x = \sec t$$

الحل :

$$1.\ y' = 3\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\times\frac{1}{3} - 3\cos\frac{x}{3}\times\frac{1}{3} = \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}$$

$$= \cos\frac{x}{3}\left(\sin^2\frac{x}{3} - 1\right) = -\cos^3\frac{x}{3}$$

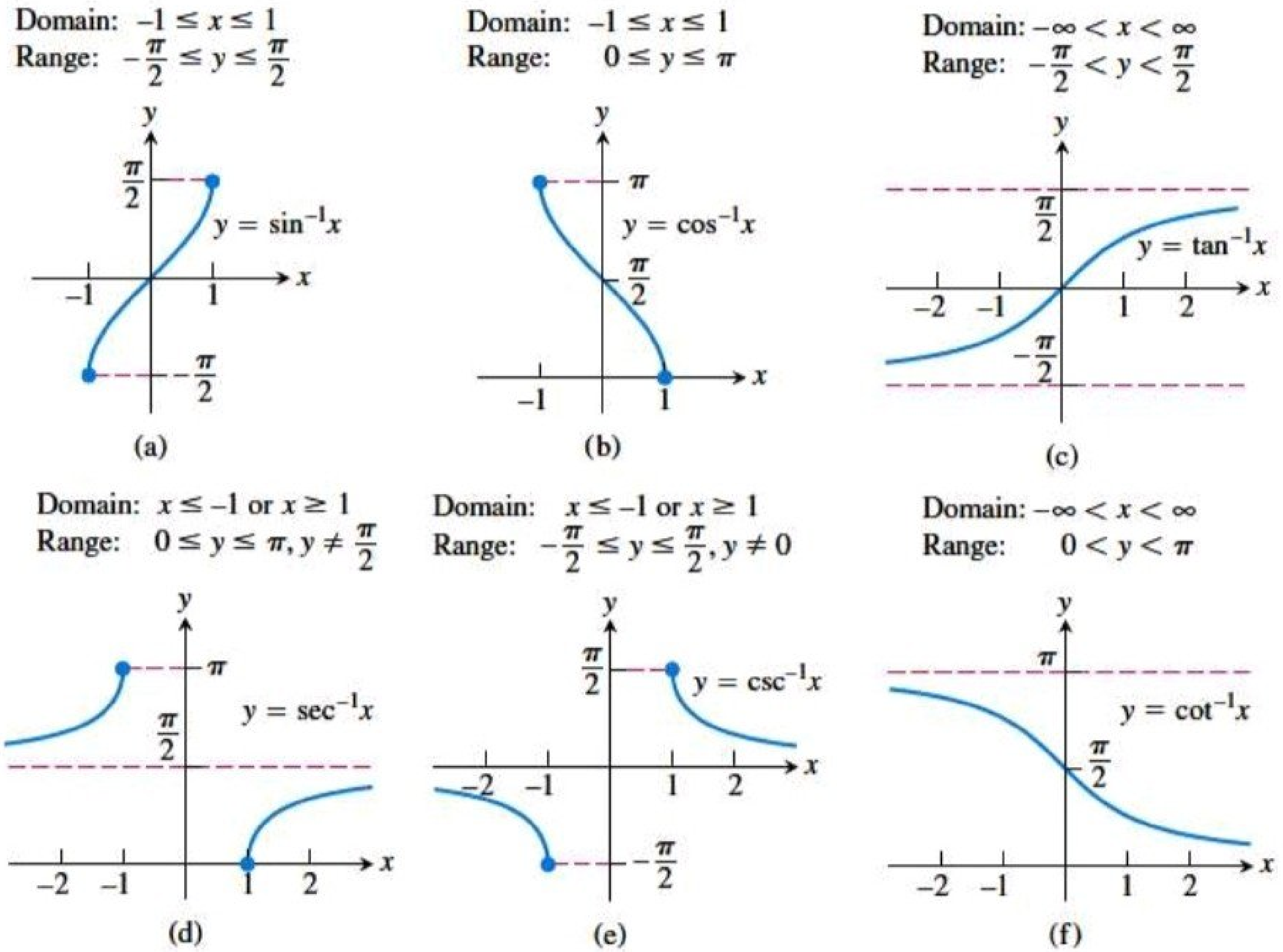
$$2.\ y' = x^2\cos x + 2x\sin x - 2x\sin x + 2\sin x - 2\sin x = x^2\cos x$$

$$3.\ y' = -2\tan(\cos x)\sec^2(\cos x)\sin x$$

$$4.\ \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \sec t\tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1/\cos t}{\sin t/\cos t} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

Inverse trigonometric functions الدوال المثلثية العكسية



بعض الخصائص :

1. $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$
2. $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$
3. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$
4. $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
5. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
6. $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$
7. $\csc^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x}$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} . \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} . \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} . \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} . \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} . \frac{du}{dx}$

مثال (٧) جد y' للدوال التالية :

1. $y = \tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$

2. $y = x\ \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

3. $y = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x$

4. $y = x\cos^{-1} 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

الحل :

$$1.\ y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$2.\ y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$$

$$3.\ y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$4.\ y' = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \cos^{-1} 2x - \frac{-8x}{4\sqrt{1-4x^2}} = \cos^{-1} 2x$$

تمارين

جد y' للدوال التالية

1. $y = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x$

2. $y = \csc^{-1}(x^2+1)$

3. $y = \cot^{-1}(1/x) + \tan^{-1} x$

4. $y = \csc^{-1}(\sec x)$

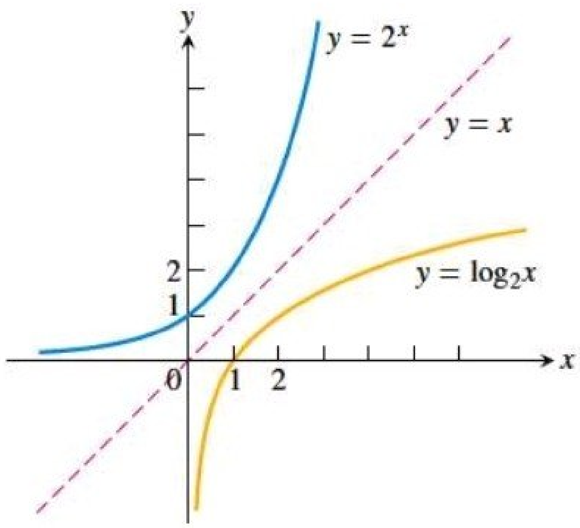
5. $y = 1 - \sin t\ \ , x = t - \sin t$

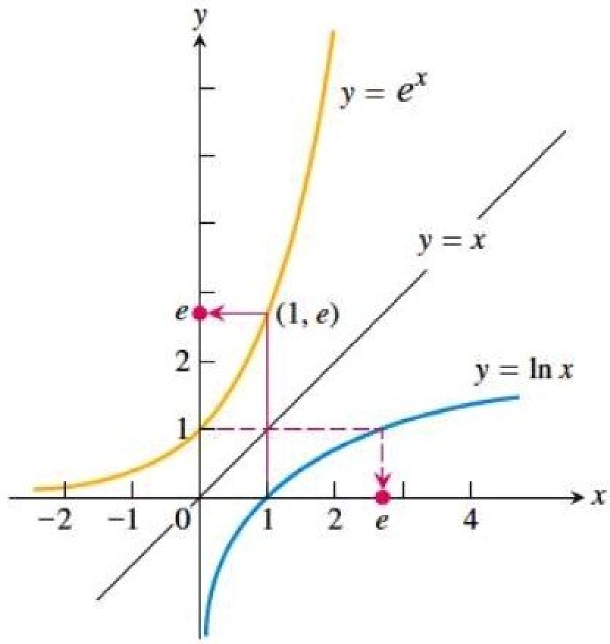
6. $y = \tan t\ \ , x = \sec^2 t - 1$

7. $y = \sin(\cos(2x-1))$

8. $y = \sqrt{1-\cos(x^2)}$

الدالة اللوغاريتمية $\log_a x$ والدالة الاسية a^x Logarithm function & Exponential function





قواعد اللوغاريتمات

$1.\log_a(x\,.\,y) = \log_a x + \log_a y$

$2.\log_a(x\,/y) = \log_a x - \log_a y$

$3.\log_a x^n = n\log_a x$

$4.\log_a a = 1$

$5.\log_a a^x = x$

$6.\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$

منطلق ومدى الدالة اللوغاريتمية :

اذا كان $y = \log_a u$ و $u = u(x)$ فان $Domain = \{u|u > 0\}$ و $Range : -\infty < y < \infty$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

$* \quad \dfrac{d}{dx}(\log_a u) = \dfrac{1}{u\ln a}\,.\dfrac{du}{dx}$

$** \quad \dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{u}\,.\dfrac{du}{dx}$

قواعد الأُسس

$1.\,a^{x+y} = a^x.a^y$ $\quad 2.\,a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\quad 3.\,(a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad 4.\,a^u = e^{u\ln a}$

مشتقة الدالة الأُسية :

$* \quad \dfrac{d}{dx}\,a^u = a^u\,.\dfrac{du}{dx}\,.\ln a$

$** \quad \dfrac{d}{dx}\,e^u = e^u\,.\dfrac{du}{dx}$

منطلق ومدى الدالة الأُسية :

اذا كان $y = a^u$ و $u = u(x)$ فان $Domain : -\infty < u < \infty$ و $Range : \{y|y > 0\}$

العلاقة بين الدالة الاسية اللوغاريتمية

$$y = \log_a x \quad \leftrightarrow \quad x = a^y$$

مثال (٨) جد منطلق الدوال التالية :

$1. y = \log_5(3 - x^2)$ $\qquad$ $2. y = \log(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

الحل

$1.\quad 3 - x^2 > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 3 < 0 \;\rightarrow\; D = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$2. x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \;\rightarrow\; x^3 - x - 2x^2 + 2 > 0 \rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) > 0$

$(x^2 - 1)(x - 1) > 0 \;\rightarrow\; (x - 1)(x + 1)(x - 2) > 0$

النقاط الحدودية هي $x = 1\,, -1\,, 2$

الفترة	قيمة x داخل الفترة	قيمة $x^3 - 2x^2 - x + 2$	اشارة $x^3 - 2x^2 - x + 2$
$(-\infty, -1]$	-2	-12	سالبة
$(-1,1)$	0	2	موجبة
$(1,2)$	1.5	-0.625	سالبة
$(2, \infty)$	3	8	موجبة

$D = (-1,1) \cup (2, \infty)$

مثال (٩) جد قيمة x لكل ما يلي :

$1.\quad -8 = \log 2x$ $\qquad$ $2.\quad \log(3x - 5) = 2$

الحل

$1.\quad 2x = 10^{-8} \;\rightarrow\; x = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

$2.\quad 3x - 5 = 10^2 \;\rightarrow 3x = 100 + 5 \;\rightarrow\; x = 35$

مثال (١٠) جد y' للدوال التالية :

$1.\ y = x^3 \ln 2x$ $\qquad$ $2. y = \tan^{-1}(e^x)$ $\qquad$ $3. y = \ln(x^2 + 4) - x \tan^{-1}\frac{x}{2}$

$4. y = \log_5(x^2 + 5x)$

الحل

$$1.\quad y' = \frac{x^3 \times 2}{2x} + 3x^2 \times \ln 2x = x^2 + 3\,x^2 \ln 2x = x^2(1 + 3\ln 2x)$$

$$2.\quad y' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$3.\ y' = \frac{2x}{x^2+4} - \left(\frac{x \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right) = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{2x}{4+x^2} - \tan^{-1}\frac{x}{2} = -\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$4.\ y' = \frac{2x + 5}{(x^2 + 5x)\ln 5}$$

تمارين

جد قيمة x لكل ما يلي :

1. $\log(3x-1)=-3$
2. $\log(7x-12)=2$

جد منطلق الدوال التالية :

3. $y=\log(x^3-4x)$
4. $y=\log\left(\sqrt{x^2-4}\right)$

جد y' للدوال التالية :

5. $y=\ln(x^2+x)$
6. $y=\ln(\ln x)$
7. $y=e^{\sin^{-1}x}$
8. $y=2^{\sec x}$
9. $y=x\sin(\log_7 x)$
10. $y=x\tan^{-1}x-\ln\sqrt{x}$
11. $y=(x^2+1)\tan^{-1}x$

الاسبوع الثالث عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة تطبيقات المشتقة وبالاخص ايجاد معادلة المماس هو فهم كيفية تغير الدالة عند نقطة معينة مما يمكننا من تحليل سلوك المنحنيات وتحديد ملامحها الهندسية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

تطبيقات المشتقة ايجاد معادلة المماس

تطبيقات على المشتقات

الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing and Decreasing Functions

تعريف:

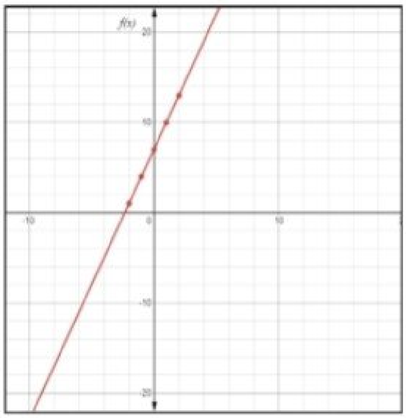
يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها متزايدة increasing على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،

If $x_1 \leq x_2$ then $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall \; x_1, x_2 \in [a, b]$

مثال: الدالة $f(x) = 3x + 7$ متزايدة في $\mathbb{R}$. لاحظ مخطط الدالة.

$D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
-2	1
-1	4
0	7
1	10
2	13



مثال: أفرض أن $f(x) = x^3$. أذا كان x_1 ، x_2 أي عددين حقيقيين بحيث $x_1 < x_2$ ، فأن $x_1^3 < x_2^3$ ، أي، $f(x_1) < f(x_2)$. وعليه فأن هذه الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

تعريف:

يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها متناقصة decreasing على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،

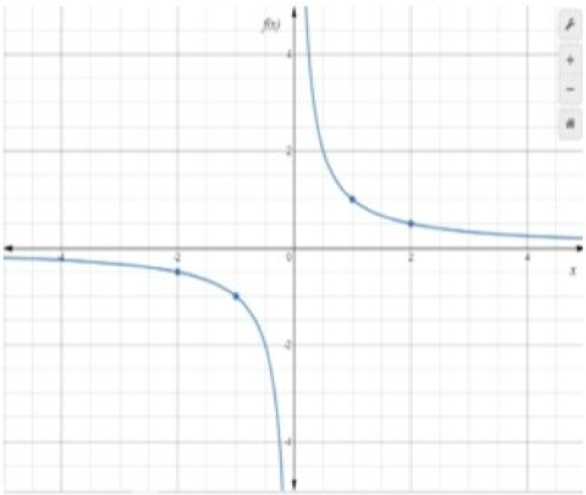
If $x_1 \leq x_2$ then $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall \; x_1, x_2 \in [a, b]$

مثال: الدالة $f(x) = 7 - 3x$ متناقصة في $\mathbb{R}$. لاحظ مخطط الدالة.

x	$f(x)$
-2	13
-1	10
0	7
1	4
2	1

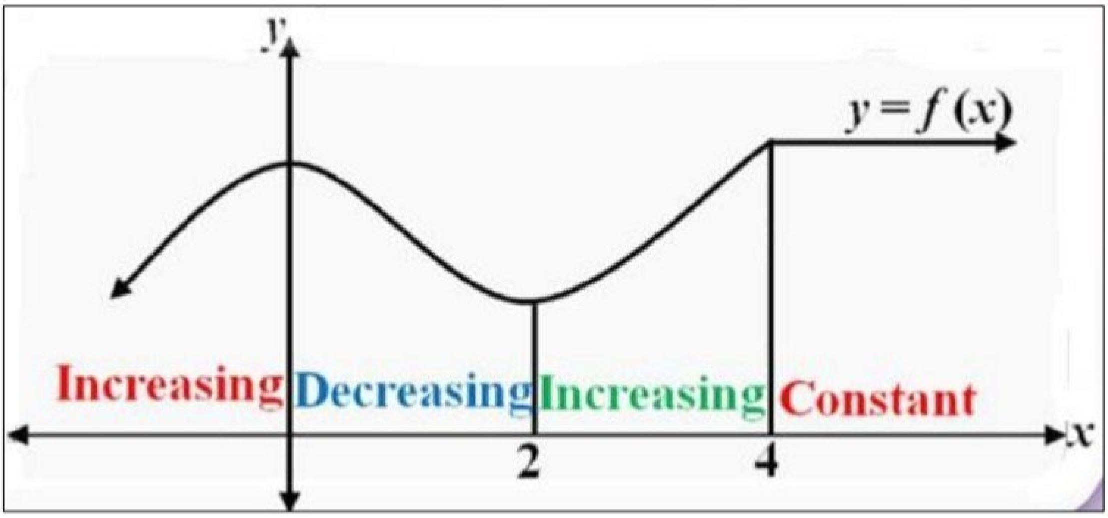
مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$. لاحظ أن هذه الدالة متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ ومتناقصة ايضاً على الفترة $(-\infty, 0)$.

x	$f(x)$
-2	-0.5
-1	-1
0	undefined
1	1
2	0.5



تعريف: يقال للدالة $f(x)$ أنها رتيبة monotonic على فترة I أذا كانت اما متزايدة على I أو متناقصة على I .

تعريف: يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها ثابتة constant على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،
$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$



من الشكل نلاحظ أن الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0, 2)$ ومتزايدة مرة أخرى على الفترة $(2, 4)$ وثابتة على الفترة $(4, \infty)$.

تعريف: أذا كان العدد c في منطلق الدالة f وكان أما $f'(\mathrm{c}) = 0$ أو $f'(\mathrm{c})$ غير موجودة، فيقال أن c عدد حرج critical number للدالة f . وقيمة الدالة عند هذا العدد، أي $f(\mathrm{c})$ ، تسمى بالقيمة الحرجة. وتسمى النقطة $(\mathrm{c}, f(\mathrm{c}))$ بالنقطة الحرجة للدالة f (أو أحداثيات النقطة الحرجة).

أيجاد النقاط الحرجة للدالة:

أولاً: نُوجِد المشتقة الأولى للدالة، ثم نوجد الاعداد الحرجة للدالة كالاتي:

- إذا كان هناك قيم x تجعل المشتقة غير معرَّفة (بشرط هذه القيم تقع في منطلق الدالة) فهذه القيم تمثل أعداد حرجة.
- نساوي المشتقة الأولى بالصفر، ثم نَحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيم x. أذا كانت القيم الناتجة لــ x تقع في منطلق الدالة فهذه القيم أيضاً تمثل أعداد حرجة للدالة.

ثانياً: نعوِّض القيم الناتجة لــ x (الاعداد الحرجة التي حصلنا عليها في الخطوات السابقة) في الدالة لإيجاد القيم الحرجة للدالة.

ثالثاً: النقاط الحرجة للدالة (أو أحاثيات النقاط الحرجة للدالة) تكون بالشكل: $(x, f(x))$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^2 - 2\,x$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن منطلقها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x - 2$

بما أن المشتقة الأولى معرفة على جميع قيم x ، أي لا يوجد قيم x تجعل المشتقة غير معرفة.

إذاً علينا إيجاد قيم x الممكنة فقط؛ بحيث تكون المشتقة الأولى مساوية للصفر.

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \in \mathrm{D}_f$

وهكذا، العدد الحرج هو $x = 1$. يمكننا إيجاد قيمة الدالة عند هذا العدد:

$f(1) = 1^2 - 2\,(1) = -1.$

اذاً النقطة الحرجة للدالة هي $(1, -1)$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

الحل: لاحظ أن منطلق هذه الدالة هو $[0, \infty)$ وأن

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$. وبما أن العدد 0 يقع في منطلق الدالة، فأن العدد الحرج لهذه الدالة هو $x = 0$. أما الاعداد الحرجة التي يتم الحصول عليها بمساواة المشتقة الأولى بالصفر، نلاحظ أن

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow 1 = 0$$

وهذا غير ممكن. لذلك فأن العدد الحرج الوحيد لهذه الدالة هو $x = 0$. أما النقطة الحرجة للدالة فهي:

$$(0, f(0)) = (0, \sqrt{0}) = (0,0)$$

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \frac{x^2+16}{x^2}$

الحل: منطلق هذه الدالة هو $\mathbb{R} - \{0\}$. نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x) = \frac{x^2(2x) - (x^2+16)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 32x}{x^4} = \frac{-32x}{x^4} = \frac{-32}{x^3}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{-32}{x^3}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$ ، ولكن العدد 0 لا ينتمي الى مجال الدالة. كذلك اذا تم مساواة المشتقة بالصفر فأن:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-32}{x^3} = 0 \Longrightarrow -32 = 0$$

وهذا غير ممكن. أذاً لا توجد أعداد حرجة للدالة، وعليه ليس هناك نقاط حرجة للدالة.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^4 - 8\,x^2$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن منطلقها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

لأيجاد الأعداد الحرجة، نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، ثم نضعها تساوي الصفر ونحل المعادلة بالنسبة لــ x .

$$f'(x) = 4\,x^3 - 16\,x = 0 \Longrightarrow 4\,x\,(x^2 - 4) = 0$$
$$\Longrightarrow 4\,x\,(x+2)\cdot(x-2) = 0$$

وبحل المعادلة نحصل على الأعداد الحرجة:

$$x = 0\,, \qquad x = -2\,, \quad x = 2$$

ومنها نحصل على القيم الحرجة للدالة:

$$f(0) = 0$$
$$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$$

$$f(2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$$

أذاً النقاط الحرجة للدالة هي:

$$(0,0)\ , \qquad (-2,-16)\ , \qquad (2,-16)$$

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) ،

- أذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فان f متزايدة على الفترة (a, b) .
- أذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فان f متناقصة على الفترة (a, b).
- اذا كانت $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فأن f ثابتة على الفترة (a, b).

أي أن إشارة المشتقة الأولى تمكننا من معرفة تزايد وتناقص الدالة.

خطوات تحديد فترات التزايد والتناقص للدالة

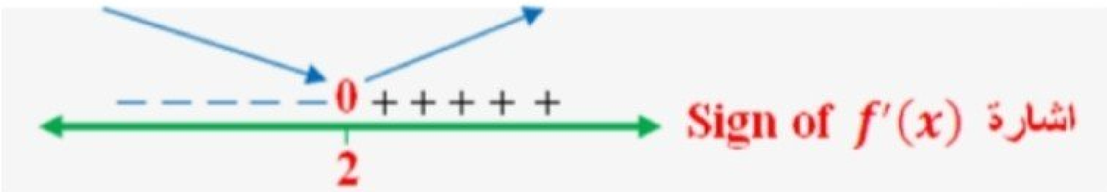
- نجد الاعداد الحرجة للدالة ونعينها على خط الاعداد، ومنها يتم تحديد الفترات.
- نختار عدد من كل فترة ونحسب المشتقة في هذا العدد.
- اذا كانت أشارة المشتقة موجبة تكون الدالة متزايدة واذا كانت سالبة تكون الدالة متناقصة.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$

الحل:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in D_f .$$

وبذلك يكون لدينا فترتين هما $(-\infty, 2)$ و $(2, \infty)$.



لأختبار الفترة $(-\infty, 2)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 1$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$$f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \quad \text{سالبة}$$

هذا يعني أن الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$.

لأختبار الفترة $(2, \infty)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 3$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$$f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2 > 0 \quad \text{موجبة}$$

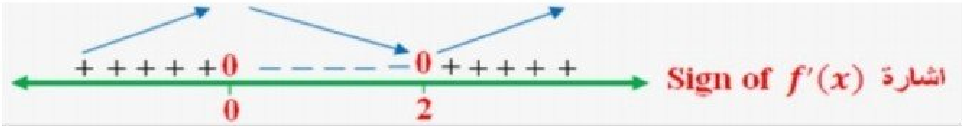
وعليه، فأن الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2, \infty)$.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$, or $x = 2$.

هذه القيم لـــ x تمثل أعداد حرجة للدالة.



لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, \infty)$.

أختبار الفترة $(-\infty, 0)$: لنأخذ $x = -1$ ، فأن

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$.

أختبار الفترة $(0, 2)$: لنأخذ $x = 1$ ، فأن

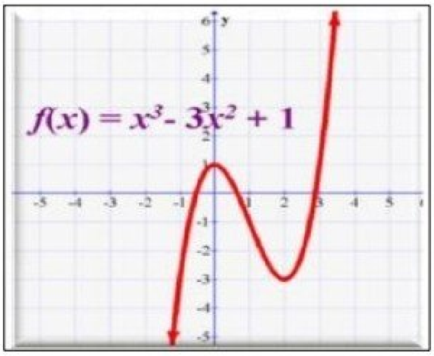
$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 < 0$ سالبة

أذاً الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(0, 2)$.

أختبار الفترة $(2, \infty)$: لنأخذ $x = 3$ ، فأن

$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2, \infty)$.



مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

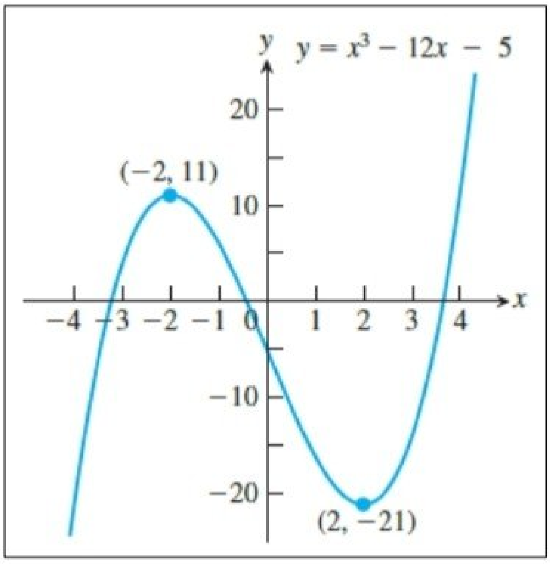
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 3(x+2)(x-2) = 0$$

$\Rightarrow x = -2, \text{ or } x = 2$ أعداد حرجة

وبذلك يكون لدينا ثلاث فترات $(-\infty, -2)$ ، $(-2, 2)$ ، $(2, \infty)$.

Interval	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluated	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$
Behavior of f	increasing	decreasing	increasing

واضح ان الدالة f متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ ، متناقصة على الفترة $(-2, 2)$ ، ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$.



الاسبوع الرابع عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة التكامل وتكامل الدوال الجبرية هو هم كيفية ايجاد المشتقات العكسية للدوال وكيفية تطبيق هذه المفاهيم في حل مسائل رياضية وهندسية مختلفة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

التكامل وتكامل الدوال الجبرية

التكامل :-

يعرف التكامل : على انه عملية ايجاد الدالة اخذت مشتقتها اي ان العملية (التكامل)عكس (التفاضل ، المشتقة).

حيث ان التفاضل الدالة معلومة والمشتقة مجهولة اما في حالة التكامل المشتقة معلومة والدالة مجهولة .

يوجد نوعان من التكامل :

١- التكامل الغير محدد

٢- التكامل المحدد

قوانين التكامل (الدالة الجبرية):

ملاحظة : c هنا يمثل ثابت التكامل

ويمثل a العدد الثابت بهذه القوانين الخمسة

1) $\int dx = x + c$

2) $\int a\, dx = a \int dx = ax + c$

3) $\int [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int f(x) dx \ \pm \int g(x) dx$

4) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

5) $\int u^n . du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

حيث ان u متغير ل x وان u لايساوي 1- لانه لايجوز القسمة على صفر

الامثلة :- اوجد تكامل الدوال الجبرية التالية :-

مثال(1) :-

Y=$\int (x^5 + 3x^{-6} + 8x + 10) dx$

=$\int x^5 dx + 3 \int x^{-6}\, dx + 8 \int x\, dx + 10 \int dx$

$$y = \frac{x^6}{6} + 3\frac{x^{-5}}{-5} + 8\frac{x^2}{2} + 10\,x + c$$

$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{5}x^{-5} + 4x^2 + 10x + c$$

مثال(2) :-

$$y = \int (x+2)(x-1)dx$$

$$= \int (x^2 - x + 2x - 2)dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int x\,dx + 2\int x\,dx - 2\int dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

(x+2)

(x-1)

X^2+2x

-x-2

X^2+x-2

مثال(3) :-

$$y = \int \frac{x^2 - 2}{x^2}\,dx$$

سوف اوزع المقام على حدود البسط

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int dx - 2\int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int dx - 2\int x^{-2}\,dx$$

$$y = x - 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$y = x + 2\frac{1}{x} + c$$

مثال(4) :-

$$y = \int (x^2 + 2x - 5)^3 (x + 1) dx$$

بما ان القوس في هذا المثال يحوي داخله دالة والقوس مرفوع الى الاس اذن الدالة من نوع القانون الخامس من قوانين التكامل اذن في البداية سوف استخدم الفرضية التالية :

$$\mathrm{x}^2 + 2x - 5 = u$$

$$\therefore \ \frac{du}{dx} = (2x + 2)$$

اقارن مابين القوس (x+1) وبين $\frac{du}{dx}$ نجد انه نحتاج الضرب والقسمة على 2 لاجل توفير مشتقة داخل القوس .

$$y = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x - 5)^3 (2x + 2) dx$$

الرقم الذي نضرب به يذهب مع اشارة التكامل اما الذي نقسم عليه فانه يظهر في نتيجة التكامل .

$$y = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{4} + c$$

$$y = \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{8} + c$$

مثال(5) :-

$$y = \int \frac{(2x - 3)}{\sqrt{3x^2 - 9x + 1}} dx$$

اولاً نحول الجذر الى قوس مرفوع الى اس كسري

$$y = \int (3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x - 3)$$

الان نستخدم الفرضية :-

$$u = (3x^2 - 9x + 1)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (6x - 9)$$

اقارن مابين القوس (2x-3) و $\frac{du}{dx}$ نرى انه ينقصنا نضرب ونقسم على 3 حتى لا تتغير قيمة المعادلة

$$y = \frac{1}{3}\int \frac{(3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}(6x - 9)dx$$

$$y = \frac{1}{3}\frac{(3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$y = \frac{2}{3}(3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}} + c$$

مثال(6) :-

$$y = \int ((1 - x)\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 4x)dx$$

$$= \int (1 - x)\sqrt{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx + 4\int x\, dx$$

احول الجذر الى اس كسري $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وفي حالة ضرب $(x^{\frac{1}{2}})(x - 1)$ $(1 - x)(x^{\frac{1}{2}})$ نحصل على$(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})$ حيث عند الضرب تجمع الاسس

وتصبح المعادلة اعلاه بالصيغة التالية :-

$$y = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + 4 \int x \, dx$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + 4 \, \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - x^{-1} + 2x^2 + c$$

تكامل الدوال المثلثية :-

1- $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

2- $\int \cos u \, du = \sin u + c$

3- $\int sec^2 u \, du = \tan u + c$

4- $\int csc^2 u \, du = -\cot u + c$

5- $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$

6- $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$

(-) السالب يرافق كل دالة مثلثية تبدا بالحرف c في ناتج تكاملها

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال المثلثية :-

مثال(1) :-

$$y = \int (\, 3\cos 3x + 5 \sin 2x \,)\, dx$$

نفكر بمشتقة الزاوية للدالة المثلثية حيث نفرض

$2x = u$	$3x = u$
$2 = \frac{du}{dx}$	$3 = \frac{du}{dx}$
$2dx = du$	$\therefore 3dx = du$
وبالضرب والقسمة على 2 ينتج $dx = \frac{du}{2}$	

نوزع التكامل على حدود المعادلة

$$y = \int 3\cos 3x\ dx + \int 5\sin 2x\ dx$$

وبالتعويض بالفرضية اعلاه

$$= \int \cos u\ du + 5\int \sin \frac{du}{2}$$

نعوض عن u بما يساويها من الفرضية اعلاه

$$= \sin u + \frac{5}{2}(-\cos u) + c$$

$$= \sin 3x - \frac{5}{2}\cos 2x + c$$

مثال (2):-

$$y = \int \sin \frac{x}{6}\ dx$$

نفرض ان $\frac{x}{6} = u$

$\frac{1}{6} = \frac{du}{dx}$ اذن مشتقة الزاوية 1/6 التي يجب ان نوفرها

$$\frac{1}{6}dx = du$$

$$\therefore dx = 6\ du$$

نعوض بالفرضية اعلاه نحصل على :-

$$y = \int \sin u * 6\, du$$

$$= 6(-\cos u) + c$$

$$= -6\cos\frac{x}{6} + c$$

نرجع المعادلة الى اصلها ماقبل الفرضية
بالتعويض عن u بما يساويها

مثال (3):-

$$y = \int tan^3 x\, sec^2 x\, dx$$

$$\tan x = u$$

نفرض ان

$$\therefore\ sec^2 x = \frac{du}{dx}$$

$$sec^2 x dx = du$$

$$\therefore y = \int u^3\, du$$

$$y = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

مثال (4):-

$$y = \int sec^3 x \tan x\, dx$$

$$= \int sec^2 x \sec x \tan x\, dx$$

ملاحظة : عند الضرب تجمع الاسس

نفرض ان

$$\sec x = u$$

$$\sec x \tan x = \frac{du}{dx}$$

$$\sec x \tan x \; dx = du$$

باستخدام الفرضية اعلاه

$$y = \int (u)^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{(\sec x)^3}{3} + c = \frac{sec^3 x}{3} + c$$

مثال (5):-

$$y = \int \frac{1 - cos^2 2x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$= \int \frac{(1 \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)} dx = \int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int dx - \int \cos 2x \; dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + c$$

مثال(6) :-

$$y = \int \sqrt{\cos x} \sin x \; dx$$

نحول الجذر الى اس كسري

$$= \int (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x \; dx$$

نفرض ان

$$\cos x = u$$

$$-\sin x = \frac{du}{dx} \rightarrow -\sin x\, dx = du$$

$$\therefore \sin x\, dx = -du$$

نعوض بالفرضية بتكامل الدالة اعلاه ينتج

$$y = \int u^{\frac{1}{2}}\,(-du)$$

تضرب المعادلة بالسالب لأجل توفير مشتقة داخل القوس

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + c$$

تكامل الدوال اللوغارتمية :-

يمكن ان تكامل الدوال اللوغارتمية بواسطة القانونين التاليين :-

1) $y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

2) $y = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$

حيث تمثل u دالة للمتغير x

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال اللوغارتمية :-

مثال(1) :-

توزيع المقام على حدود البسط

$$y = \int \frac{3x-2}{x} dx$$

$$= \int \left(\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}\right) dx = \int \left(3 - \frac{2}{x}\right) dx = 3\int dx - 2\int \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore y = 3x - 2\ln x + c$$

مثال (2):-

$$y = \int \frac{dx}{(3x+5)}$$

نفرض ان

$$3x + 5 = u$$

$$3 = \frac{du}{dx} \rightarrow 3dx = du \rightarrow \therefore dx = \frac{du}{3}$$

نعوض بالفرضية بدالة التكامل ينتج

$$y = \int \frac{1}{u} . \frac{du}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\ln u + c = \frac{1}{3}\ln(3x+5) + c$$

مثال (3):-

$$y = \int \tan 8x \, dx$$

$$= \int \frac{\sin 8x}{\cos 8x}\ dx$$

نفرض ان

$$\cos 8x = u$$

$$-\sin 8x * 8 = \frac{du}{dx}$$

$$-8 \sin 8x\ dx = du$$

$$\sin 8x\ dx = -\frac{du}{8}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$y = \int -\frac{1}{u} . \frac{du}{8}$$

$$= -\frac{1}{8} \ln u + c \ \rightarrow \ -\frac{1}{8} \ln(\cos 8\, x) + c$$

<u>تكامل الدوال الاسية :-</u>

يمكن ان تكامل الدوال الاسية بواسطة القانونين التاليين :-

1) $y = \int e^x\ dx = e^x + c$

2) $y = \int e^u\ du = e^u + c$ حيث u تمثل دالة للمتغير x

مثال (1) :-

$$y = \int x^2\ e^{3x^3}\ dx$$

نفرض ان

$$3x^3 = u$$

$$9\,x^2 = \frac{du}{dx}$$

$$9\mathrm{x}^2\, dx = du$$

$$\therefore\ x^2\, dx = \frac{du}{9}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$y = \int e^u \frac{du}{9}\ \rightarrow \therefore\ y = \frac{1}{9} e^u + c = \frac{1}{9} e^{3x^3} + c$$

مثال (2) :-

$$y = \int e^{\sin 4x} \cos 4x\, dx$$

نفرض ان

$$\sin 4x = u$$

$$\cos 4x.4 = \frac{du}{dx}$$

$$4\cos 4x\ dx\ = du$$ بقسمة الطرفين على 4

$$\cos 4x\ dx = \frac{du}{4}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$y = \int e^u \frac{du}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} e^u + c = \frac{1}{4} e^{\sin 4x} + c$$

الاسبوع الخامس عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم تكامل الدوال المثلثية هو ايجاد المساحة اسفل منحنيات الدوال المثلثية وفهم كيفية استخدامها في التطبيقات المختلفة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري

الأنشطة المستخدمة:

- أنشطة تفاعلية صفية
- أسئلة عصف ذهني
- أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
- واجب بيتي
- واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

- التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
- اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
- التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
- الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

تكامل الدوال المثلثية

التكامل :-

يعرف التكامل : على انه عملية ايجاد الدالة اخذت مشتقتها اي ان العملية (التكامل)عكس (التفاضل ، المشتقة).

حيث ان التفاضل الدالة معلومة والمشتقة مجهولة اما في حالة التكامل المشتقة معلومة والدالة مجهولة .

يوجد نوعان من التكامل :

١- التكامل الغير محدد

٢- التكامل المحدد

قوانين التكامل (الدالة الجبرية):

ملاحظة : c هنا يمثل ثابت التكامل

ويمثل a العدد الثابت بهذه القوانين الخمسة

1) $\int dx = x + c$

2) $\int a\, dx = a \int dx = ax + c$

3) $\int [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int f(x)dx \ \pm \int g(x)dx$

4) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

5) $\int u^n . du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

حيث ان u متغير ل x وان u لايساوي 1- لانه لايجوز القسمة على صفر

الامثلة :- اوجد تكامل الدوال الجبرية التالية :-

مثال(1) :-

Y=$\int (x^5 + 3x^{-6} + 8x + 10)dx$

=$\int x^5 dx + 3 \int x^{-6}\, dx + 8 \int x\, dx + 10 \int dx$

$$y=\frac{x^6}{6}+3\,\frac{x^{-5}}{-5}+8\frac{x^2}{2}+10\,x+c$$

$$y=\frac{x^6}{6}-\frac{3}{5}x^{-5}+4x^2+10x+c$$

مثال(2) :-

$$y=\int(x+2)(x-1)dx$$

$$=\int(x^2-x+2x-2)dx$$

$$=\int x^2\,dx-\int x\,dx+2\int x\,dx-2\int dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+c$$

$$\begin{array}{r} (x+2) \\ (x-1) \\ \hline X^2+2x \\ -x-2 \\ \hline X^2+x-2 \end{array}$$

مثال(3) :-

$$y=\int\frac{x^2-2}{x^2}\,dx$$

سوف اوزع المقام على حدود البسط

$$=\int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int dx-2\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\int dx-2\int x^{-2}\,dx$$

$$y=x-2\;\frac{x^{-1}}{-1}+c$$

$$y=x+2\frac{1}{x}+c$$

مثال(4) :-

$$y = \int (x^2 + 2x - 5)^3 (x + 1) dx$$

بما ان القوس في هذا المثال يحوي داخله دالة والقوس مرفوع الى الاس اذن الدالة من نوع القانون الخامس من قوانين التكامل اذن في البداية سوف استخدم الفرضية التالية :

$$\mathrm{x}^2 + 2x - 5 = u$$

$$\therefore \ \frac{du}{dx} = (2x + 2)$$

اقارن مابين القوس (x+1) وبين $\frac{du}{dx}$ نجد انه نحتاج الضرب والقسمة على 2 لاجل توفير مشتقة داخل القوس .

$$y = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x - 5)^3 (2x + 2) dx$$

الرقم الذي نضرب به يذهب مع اشارة التكامل اما الذي نقسم عليه فانه يظهر في نتيجة التكامل .

$$y = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{4} + c$$

$$y = \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{8} + c$$

مثال(5) :-

$$y = \int \frac{(2x - 3)}{\sqrt{3x^2 - 9x + 1}} dx$$

اولاً نحول الجذر الى قوس مرفوع الى اس كسري

$$y = \int (3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x - 3)$$

الان نستخدم الفرضية :-

$$u = (3x^2 - 9x + 1)$$

$$\therefore \ \frac{du}{dx} = (6x - 9)$$

اقارن مابين القوس (2x-3) و $\frac{du}{dx}$ نرى انه ينقصنا نضرب ونقسم على 3 حتى لا تتغير قيمة المعادلة

$$y = \frac{1}{3}\int \frac{(3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\,(6x - 9)dx$$

$$y = \frac{1}{3}\,\frac{(3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$y = \frac{2}{3}(3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}} + c$$

مثال(6) :-

$$y = \int ((1 - x)\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 4x)dx$$

$$= \int (1 - x)\sqrt{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + 4\int x\,dx$$

احول الجذر الى اس كسري $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وفي حالة ضرب $(x^{\frac{1}{2}})(1 - x)$ نحصل على$(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})$ حيث عند الضرب تجمع الاسس

وتصبح المعادلة اعلاه بالصيغة التالية :-

$$y = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + 4 \int x \, dx$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + 4 \, \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - x^{-1} + 2x^2 + c$$

تكامل الدوال المثلثية :-

1- $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

2- $\int \cos u \, du = \sin u + c$

3- $\int sec^2 u \, du = \tan u + c$

4- $\int csc^2 u \, du = -\cot u + c$

5- $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$

6- $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$

(-) السالب يرافق كل دالة مثلثية تبدا بالحرف c في ناتج تكاملها

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال المثلثية :-

مثال(1) :-

$$y = \int (3 \cos 3x + 5 \sin 2x) \, dx$$

نفكر بمشتقة الزاوية للدالة المثلثية حيث نفرض

$$2x = u$$

$$2 = \frac{du}{dx}$$

$$2dx = du$$

وبالضرب والقسمة على 2 ينتج $dx = \frac{du}{2}$

$$3x = u$$

$$3 = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore 3dx = du$$

نوزع التكامل على حدود المعادلة

$$y = \int 3\cos 3x\, dx + \int 5\sin 2x\, dx$$

وبالتعويض بالفرضية اعلاه

$$= \int \cos u\, du + 5\int \sin \frac{du}{2}$$

نعوض عن u بما يساويها من الفرضية اعلاه

$$= \sin u + \frac{5}{2}(-\cos u) + c$$

$$= \sin 3x - \frac{5}{2}\cos 2x + c$$

مثال (2):-

$$y = \int \sin\frac{x}{6}\, dx$$

نفرض ان $\frac{x}{6} = u$

$\frac{1}{6} = \frac{du}{dx}$ اذن مشتقة الزاوية 1/6 التي يجب ان نوفرها

$$\frac{1}{6}dx = du$$

$$\therefore dx = 6\, du$$

نعوض بالفرضية اعلاه نحصل على :-

$$y = \int \sin u * 6\, du$$

$$= 6(-\cos u) + c$$

$$= -6\cos\frac{x}{6} + c$$

نرجع المعادلة الى اصلها ماقبل الفرضية
بالتعويض عن u بما يساويها

مثال (3):-

$$y = \int tan^3x\, sec^2x\, dx$$

نفرض ان

$$\tan x = u$$

$$\therefore\ sec^2x = \frac{du}{dx}$$

$$sec^2xdx = du$$

$$\therefore y = \int u^3\, du$$

$$y = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

مثال (4):-

$$y = \int sec^3x \tan x\, dx$$

$$= \int sec^2x \sec x \tan x\, dx$$

ملاحظة : عند الضرب تجمع الاسس

نفرض ان

$$\sec x = u$$

$$\sec x \tan x = \frac{du}{dx}$$

$$\sec x \tan x \, dx = du$$

باستخدام الفرضية اعلاه

$$y = \int (u)^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{(\sec x)^3}{3} + c = \frac{sec^3 x}{3} + c$$

مثال (5):-

$$y = \int \frac{1 - cos^2 2x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$= \int \frac{(1 \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)} dx = \int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int dx - \int \cos 2x \, dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + c$$

مثال(6) :-

$$y = \int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx$$

نحول الجذر الى اس كسري

$$= \int (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x \, dx$$

نفرض ان

$$\cos x = u$$

$$-\sin x = \frac{du}{dx} \rightarrow -\sin x\, dx = du$$

$$\therefore \sin x\, dx = -du$$

نعوض بالفرضية بتكامل الدالة اعلاه ينتج

$$y = \int u^{\frac{1}{2}}\,(-du)$$

تضرب المعادلة بالسالب لأجل توفير مشتقة داخل القوس

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + c$$

<u>تكامل الدوال اللوغارتمية :-</u>

يمكن ان تكامل الدوال اللوغارتمية بواسطة القانونين التاليين :-

1) $y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

2) $y = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$

حيث تمثل u دالة للمتغير x

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال اللوغارتمية :-

مثال(1) :-

توزيع المقام على حدود البسط

$$y = \int \frac{3x - 2}{x} dx$$

$$= \int \left(\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}\right) dx = \int \left(3 - \frac{2}{x}\right) dx = 3 \int dx - 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore y = 3x - 2\ln x + c$$

مثال (2):-

$$y = \int \frac{dx}{(3x + 5)}$$

نفرض ان

$$3x + 5 = u$$

$$3 = \frac{du}{dx} \rightarrow 3dx = du \rightarrow \therefore dx = \frac{du}{3}$$

نعوض بالفرضية بدالة التكامل ينتج

$$y = \int \frac{1}{u} . \frac{du}{3}$$

$$y = \frac{1}{3} \ln u + c = \frac{1}{3} \ln(3x + 5) + c$$

مثال (3):-

$$y = \int \tan 8x \, dx$$

الطلبـة الأعـزاء :الرجاء إضافة المعلومات المتممة التي سيقدمها المدرس أثناء المحاضرة .

لمزيد من المعلومات :

- الإطلاع على الصفحات 558-586 بالمرجع : الرياضيات للمهندسين – تأليف (A.Croft and R. Davison) النسخة الثالثة سنة التأليف عام 1998-سنة النشر 2008
- الإطلاع على الدورية Journal of Linear Algebra and its Applications

- References:
- Mathematics for Engineers : A.Croft and R. Davison, Third Edition (2008).
- Introductory Linear Algebra، An Applied First course, B. Kolman and D. Hill (2005).