وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التقني العمارة
قسم شبكات وبرامجيات الحاسوب

الحقيبة التدريسية لمادة
الرياضيات

الصف الاول

تدريسي المادة
م.م ساره فوزي غافل

الفصل الدراسي الاول

جدول مفردات مادة الرياضيات

الاسبوع	المفردات
1	تطبيقات على الماتلاب واهم نوافذ العمل
2	العمليات على المصفوفات
3	العمليات على المصفوفات
4	تطبيق عن معكوس المصوفة وطرق ايجادها
5	امثلة عن حل المعادلات الخطية باستخدام معوكسة المصوفة وضرب المصفوفات
6	امثلة عن حل المعادلات الخطية باستخدام معوكسة المصوفة وضرب المصفوفات
7	تطبيقات عن الدوال الخطية المثلثية و مشتقاتها
8	تطبيقات عن الدوال الخطية المثلثية و مشتقاتها
9	تطبيق عن الدوال الاسية واللوغارتيمية ومشتقاتها
10	تطبيق عن الدوال الاسية واللوغارتيمية ومشتقاتها
11	تمارين عن التفاضل الجزئي
12	امثلة التفاضل العددي طريقة شبة المنحرف
13	تمارين عن المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الاولى
14	تطبيق انواع وطرق حل المعادلات التفاضلية (فصل المتغيرات والمتجانسة)
15	امثلة عن المعادلات التفاضلية التامة والخطية

الهدف من دراسة مادة الرياضيات (الهدف العام):

تعريف الطالب على الاساليب الرياضية المستخدمة في حل الاسئلة الرياضية بطريقة منطقية وتشمل تحديد الوظائف ومشتقاتها والتفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق وايجاد الجذر ةالتفاضل والطرق العددية في حل الاسئلة الرياضيات مقارنة بالطرق الرياضية باستخدام الكمبيوتر في تطبيق الماتل

الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول / قسم شبكات وبرامجيات الحاسوب

التقنيات التربوية المستخدمة:

1. سبورة واقلام
2. السبورة التفاعلية
3. عارض البيانات Data Show
4. جهاز حاسوب محمول Laptop
5. مختبر الحاسبات

الاسبوع الأول

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من التعرف على تطبيقات الماتلاب هو فهم القدرات الواسعة التي توفرها هذه الاداة في مختلف المجالات الهندسية والعلمية بالاضافة الى تطوير مهارات البرمجة

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

1. أنشطة تفاعلية صفية
2. أسئلة عصف ذهني
3. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
4. واجب بيتي
5. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

1. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
2. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
3. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
4. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تطبيقات الماتلاب واهم نوافذ العمل)

لغة البرمجة The MATLAB Programming Language : MATLAB

مقدمة

يعتبر برنامج MATLAB البرنامج الأشهر في الأوساط العلمية، إذ يستخدم هذا البرنـامج فـي معظم المسائل العلمية والهندسية، وبعد نمذجة أي مسألة أو ظاهرة يأتي بعدها دور هذا البرنامج ليتعامل مع تلك البرامج ويحللها بأبسط الطرق وأحدثها وأيسرها برمجة، ومن الجدير ذكره بان هذا البرنـامج يعلـّـم أكثر من 200 معهد وكلية في الولايات المتحدة الأمريكية فقط، عدا تلك المعاهد في أوربا وبقية العالم، ويكفي أن تدخل إلى أحد محركات البحث على شبكة الانترنت وتكتب فقط MATLAB، فســتـُـذهل من عدد المواقع التي تتحدث عن هذا البرنامج.

وتعتبر لغة MATLAB لغة برمجية عالية الأداء تستخدم لإجراء الحسابات التقنيـة، وتقوم بعمليـات الحساب والإظهار ضمن بيئة سهلة البرمجة كما أنها لا تحتاج إلى احتراف كبير. تمكنك هذه اللغة من حل العديد من المسائل التقنيـة حسابيا، خاصـة التـي يعبر عنهـا بمصفوفات والتـي تحتـاج إلـى جهد كبير لبرمجتها بلغات البرمجة الأخرى مثل لغة C و FORTAN.

أتت تسمية هذه اللغة من اختصار التعبير **MATrix LABoratory** (مختبر المصفوفة)، حيث إن البرنامج مصمم أساسا للتعامل مع العمليات على المصفوفات بشكل بسيط. كما أرفقت بهذه اللغة أدوات لمعالجـة وحل تطبيقات علميـة خاصـة سميت toolboxes (وهي أكثر من عشرين أداة)، وتعتبر هذه الأدوات هامة جداً لمستخدمي هذه اللغة، حيث تسمح لهم بتعلم وتطبيق تقنيات حل متخصصـة لمعالجـة مشكلات ومسائل خاصـة، مثل معالجـة الإشارة، ونظم التحكم والمحاكاة والشبكات العصبية والتحليل العددي والكمي والمالي والإحصاء ومسائل الجبر الخطي والامثلية ... الخ.

يؤمن برنـامج MATLAB أدوات واجهـة التخاطب الرسومية Graphical User Interface (GUI) التي تجعلك تتعامل مع البرنامج على انه أداة تطبيقية متطورة.

تشغيل برنامج MATLAB

يتم تشغيل البرنامج بأحد الطرق التالية:

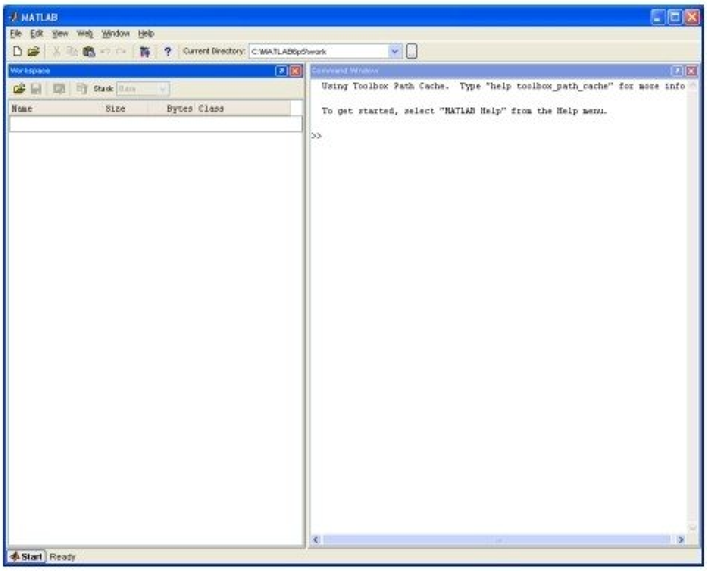
1- بعد تنصيب برنامج MATLAB على الحاسبة التى تعمل عليها. يتم إضافة رمز أيقونة البرنامج على سطح مكتب الحاسبة ويحمل الرمز 

ويتم فتحة عند النقر على الأيقونة بنقرتين مزدوجتين double click.

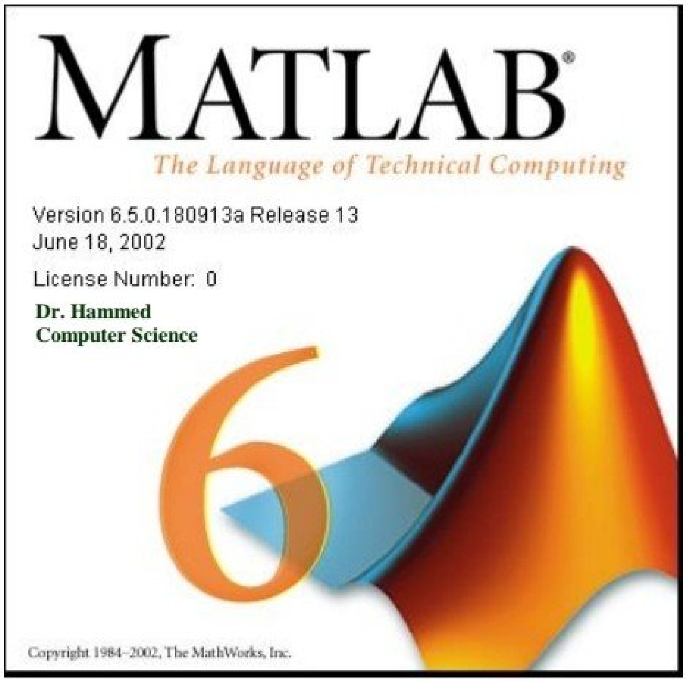
2- أو عن طريق الذهاب إلى قائمة start ومنها إلى برامج Programs ثم أسم البرنامج MATLAB 6.5.

start ⟶ Programs ⟶ MATLAB 6.5

عندها سوف تظهر لنا شاشة تحمل أسم البرنامج MATLAB ونسخة الإصدار وسنة النشر كما في الشكل رقم (1). ثم بعد ثواني قليلة تظهر نافذة البرنامج الرئيسية والتي تكون في بداية التشغيل كما في الشكل رقم (2) حيث تحتوي هذه النافذة كسائر البرمجيات التي تعمل تحت بيئة نظام Windows على نوافذ فرعية.



شكل (2): شاشة نافذة البرنامج الرئيسية (سطح مكتب MATLAB)



شكل (1): شاشة اسم البرنامج MATLAB

سطح مكتب برنامج MATLAB

عند تشغيل برنامج MATLAB ستظهر على شاشتك عدة نوافذ عنوان احدها MATLAB وتسمى سطح مكتب برنامج MATLAB، تحوي هذه النافذة وتتحكم بجميع النوافذ الأخرى المكونة لبرنامج MATLAB. وحسب خيارات تنصيب البرنامج، فقد تكون بعض هذه النوافذ مرئية أو مخفية ضمن نافذة MATLAB.

مكونات نافذة MATLAB

تتكون نافذة MATLAB من الأجزاء التالية:-

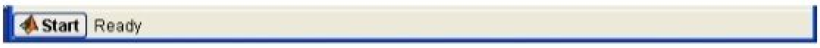
1- شريط العنوان ويكون ذات لون مميز عن باقي الأشرطة يوجد على يساره الرمز الصوري للبرنامج وأسم البرنامج 

2- شريط قوائم (Menu Bar) أو (Lists Bar) يبدأ بقائمة ملف File، قائمة تحرير Edit، قائمة عرض View، ... وحتى قائمة المساعدة Help. 

3- شريط الأدوات (Tools Bar) ويضم رموز صورية لبعض الايعازات الموجودة في قوائم الشريط السابق. 

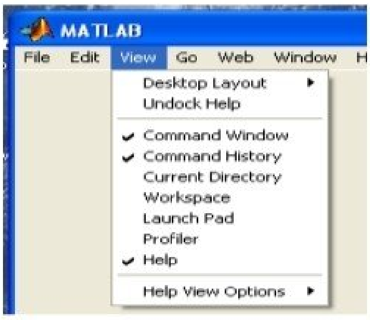
هناك في الجزء الأخير من شريط الأدوات جزء مهم يدعى الدليل الحالي (Current Directory) والذي يخبر المستخدم في أي جزء من الحاسب هو موجود حالياً وكما في الشكل (2) يعلمنا بأننا على الدليل (المجلد) MATLAB6P5\work وعلى القرص C:

4- هنالك شريط مهام خاص بنافذة برنامج MATLAB وفيه كلمتان الأولى Start وعملها كطريق مختصر لتنفيذ بعض الايعازات. بينما Ready تعلمك بأن البرنامج جاهز للعمل حسب التوجيه المعطى له.



بالإضافة إلى الأشرطة أعلاه هناك مجموعة من النوافذ الفرعية التي يمكن تفعيلها أو إخفائها حسب الحاجة وذلك كما في الشكل (3) حيث يتم تأشير أسم النافذة المرغوب بعرضها بإشارة (√)، لكن هناك نافذة أساسية للعمل هي نافذة الأمر Command Window، والتي من خلالها يتم التعامل بكتابة وتنفيذ الأوامر بصورة مباشرة أو غير مباشرة.

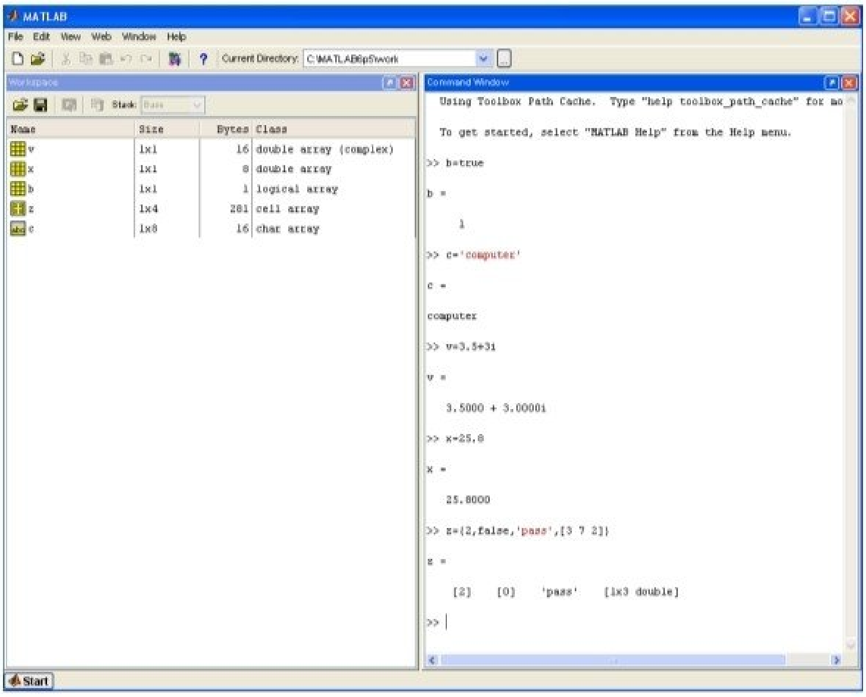
5- تعتبر النوافذ الداخلية الظاهرة أسمائها في قائمة View كما في الشكل رقم (3) هي من مكونات نافذة برنامج MATLAB ولكل نافذة منها عملها الخاص وكما يلي:-



شكل (3): النوافذ الداخلية في قائمة View

أ- نافذة الأمر Command Window: وهي نافذة لا يمكن الاستغناء عنها لأن بواسطتها يتم تنفيذ الأوامر وعرض النتائج التي نحصل عليها من تنفيذ تلك الأوامر وتكتب بعد علامة الحث (>>).

ب- نافذة ساحة العمل Workspace: وهي عن واجهة تخاطبية تسمح لك باستعراض وتحميل وحفظ متغيرات لغة MATLAB حيث تظهر قائمة تضم أسم المتغير وحجمه وعدد بياناته وصنفه (جميع متغيرات لغة MATLAB هي من صنف مصفوفة)، كما في الشكل (4).



شكل (4): نافذة الأمر Command Window ونافذة ساحة العمل Workspace.

ج- نافذة الدليل الحالي Current Directory: وهي أيضا واجهة رسومية تحدد الدليل الحاوي للملف الذي يتعامل معه برنامج MATLAB.

الاسبوع الثاني والثالث

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة العمليات على المصفوفات هو تمكين الفرد من معالجة البيانات المنظمة في شكل مصفوفات مما يتيح له حل العديد من المسائل الرياضية والعلمية والهندسية كما تساعد في فهم المفاهيم الاساسية في الجبر الخطي

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

6. أنشطة تفاعلية صفية
7. أسئلة عصف ذهني
8. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
9. واجب بيتي
10. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

5. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
6. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
7. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
8. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(العمليات على المصفوفات)

2. المصفوفات Matrices

عند معالجة منظومة المعادلات الخطية سابقاً وجدنا أنما يهمنا هو المعاملات ومواضعها في هذه المنظومة و عند إرجاعها بالصيغة المدرجة من الضروري الحفاظ على ترتيب المجاهيل من المعادلات وعندئذٍ يمكن ترتيب المعاملات بشكل مستطيلي يسمى مصفوفة (Matrix). في هذا البند سوف نتعرف على مفهوم المصفوفة و دراسة بعض أنواع المصفوفات و العمليات عليها و كذلك دراسة الخواص الأساسية لها.

المصفوفة : عبارة عن مجموعة من الأعداد تنتمي الى حقل معين (F) عناصرها مرتبة في جدول مستطيل، يسمى كل سطر أفقي من عناصر المصفوفة صفاً (row) و يسمى كل سطر رأسي عموداً (column). عادة ما يرمز للمصفوفة بأحد الأحرف الانكليزية الكبيرة مثل A, B, C ... الخ.

<u>ملاحظات :</u>

1) غالباً ما يكون الحقل (F) المعرفة عليه المصفوفة هو مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) أو مجموعة الأعداد المعقدة (Complex numbers).

2) المصفوفة A التي لها m من الصفوف و n من الأعمدة تكتب على النحو الآتي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ & & & . & & & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

و نقول ان المصفوفة A ذات سعة (درجة) m x n حيث m يمثل عدد صفوف المصفوفة A و n يمثل عدد أعمدة المصفوفة A . يرمز للعنصر في المصفوفة A بشكل عام بـ a_{ij} حيث i يمثل رقم الصف الموجود فيه العنصر a_{ij} و يمثل j رقم العمود الموجود فيه العنصر a_{ij} حيث $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

3) في كثير من الأحيان سوف نرمز للمصفوفة ببساطة بالصيغة المختزلة $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ أو $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ اذا كانت سعة المصفوفة معروفة ضمنياً، حيث (الحقل $a_{ij} \in (F$.

أمثلة : 1) لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ ، من الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×2 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R .

2) لتكن $A=\begin{bmatrix}i & 2-i & 1\\ -i & 0 & 1+i\end{bmatrix}$ ، حيث $i=\sqrt{-1}$. فمن الواضح ان المصفوفة A مصفوفة ذات سعة 2×3 معرفة على حقل الأعداد المعقدة C .

بعض المصفوفات الخاصة Some special matrices

المصفوفة الصفرية (Zero matrix): يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ بأنها مصفوفة صفرية اذا كانت جميع عناصر المصفوفة أصفار أي ان $a_{ij}=0$ لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

مثال : اكتب مصفوفة صفرية سعة 4×3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل : المصفوفة هي $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

ملاحظة : تسمى المصفوفة الصفرية بمصفوفة المحايد الجمعي وسوف نرمز لها بالرمز 0 .

المصفوفة المربعة (Square matrix): يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ بأنها مصفوفة مربعة اذا كانت $m=n$ (أي عدد صفوف A = عدد أعمدة A). و غالباً ما يقال للمصفوفة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ بأنها مصفوفة مربعة ذات سعة n (أي ذات سعة $n\times n$).

مثال : اكتب مصفوفة مربعة ذات سعة 3 معرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

الحل: المقصود بالمصفوفة ذات سعة 3 أي ذات سعة 3×3 وهي على سبيل المثال $A=\begin{bmatrix}-1&0&3\\1&8&2\\1&4&0\end{bmatrix}$.

القطر الرئيسي و القطر الثانوي Main and Secondary diagonals

لتكن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & & & . & & & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة ذات سعة n ،

فانه يقال للقطر $[a_{11},a_{22},a_{33},\dots,a_{nn}]$ بأنه قطر رئيسي للمصفوفة A (أي ان $i=j$) لكل $1\le i\le n$ و $1\le j\le n$. ويقال للقطر $[a_{1n},a_{2(n-1)},a_{3(2-n)},\dots,a_{n1}]$ بأنه قطر ثانوي للمصفوفة A .

مثلاً: في المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ القطر الرئيسي هو $[-1,8,0]$ بينما القطر الثانوي هو $[3,8,1]$.

مصفوفة سطر و مصفوفة عمود (Row and Column matrices): المصفوفة A ذات السعة $1\times n$ تسمى مصفوفة سطر ، بينما المصفوفة A ذات السعة $m\times 1$ تسمى مصفوفة عمود.

مثلاً: المصفوفة $A=[3\ \ 1\ \ 1\ \ -2]$ هي مصفوفة سطر ذات سعة 1×4 ،
بينما المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود ذات سعة 2×1.

المصفوفة القطرية (Diagonal matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ بأنها مصفوفة قطرية اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$.

مثال : بين فيما اذا كانت المصفوفات التالية قطرية أم لا و المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R ؟

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ليست مصفوفة قطرية لان $a_{13}=3\neq 0$. بينما $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية.

ملاحظة : من الممكن كتابة المصفوفة القطرية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بدلالة قطرها الرئيسي أي تكتب بالنحو التالي : $A=dig\lfloor a_{11},a_{22,}a_{33},\dots,a_{nn}\rfloor$.

فمثلاً: المصفوفة القطرية A في المثال السابق ممكن ان تكتب على النحو التالي :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=dig[-1,1,6]$$

مثال : اكتب $A=dig[3,-1,1,2]$ بدلالة المصفوفة المكونة لها ؟

الحل : من الواضح ان المصفوفة القطرية A ذات سعة 4، عليه $A=dig[3,-1,1,2]=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

المصفوفة القياسية (Scalar matrix): يقال للمصفوفة القطرية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة قياسية اذا كانت جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية، أي ان $A=dig[a,a,a,\dots,a]$.

مثلاً : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ هي مصفوفة قياسية سعة 2 و قياسها = 3 .

بينما المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة قطرية سعة 4 لكنها ليست قياسية.

المصفوفة (المحايدة أو الأحادية) (Identity matrix): يقال للمصفوفة القياسية $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة محايدة (أحادية) اذا كان قياسها = 1، أي ان $A=dig[1,1,1,\ldots,1]$.

مثلاً : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة محايدة ذات سعة 3 .

ملاحظة : تسمى المصفوفة المحايدة بمصفوفة المحايد الضربي وسوف نرمز لها بالرمز I أو I_n .

المصفوفة المثلثية السفلى (Lower triangular matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة مثلثة سفلى اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i<j$ (أي ان جميع العناصر فوق القطر الرئيسي هي أصفار).

أي تكون بالصيغة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0.&.&.&0\\a_{21}&a_{22}&0&0&.&.&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&&.&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&&&.\\&&&.&&&\\&&&.&&&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&.&.&.&a_{nn}\end{bmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العليا (Upper triangular matrix): يقال للمصفوفة المربعة $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ بأنها مصفوفة مثلثية عليا اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i>j$ (أي ان جميع العناصر تحت القطر الرئيسي هي أصفار).

أي تكون بالصيغة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}.&.&.&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}&.&.&a_{2n}\\0&0&a_{33}&a_{34}.&.&.&a_{3n}\\0&0&0&a_{44}&&&.\\&&&.&&&\\&&&.&&&\\0&0&0&.&.&.&a_{nn}\end{bmatrix}$$

مثال : أعطي مثال لمصفوفة مثلثية سفلى سعة 3 و مصفوفة مثلثية عليا سعة 4 ؟

الحل : $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ هي مثلثية سفلى سعة 3 ، $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي مثلثية عليا سعة 4 .

تساوي المصفوفات

يقال للمصفوفتين $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ و $B=\lfloor b_{ij} \rfloor$ على الحقل F بأنهما متساويتين (أي ان $A=B$) اذا تحقق الشرطين التاليين :

1) A و B لهما نفس السعة .
2) $a_{ij}=b_{ij}$ لكل i, j (أي ان العناصر في المواضع المتناظرة تكون متساوية) .

مثال : لديك المصفوفات التالية :

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ غير متساويتين لان (سعة A $\neq$ سعة B) .

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ غير متساويتين لان $(a_{21}=1\neq 0=b_{21})$.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ المصفوفتين متساويتين .

العمليات على المصفوفات

جمع مصفوفتين: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفتين على الحقل F ومن نفس السعة فان $A+B$ مصفوفة من السعة نفسها و تعرف بالشكل التالي : $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$.

<u>مثال</u> : جد ناتج جمع المصفوفتين التاليتين $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

الحل : $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+(2) & 0+1\\ 3+(-3) & 2+1\\ 1+1 & 3+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

نلاحظ ان كل من A و B من السعة 3×2 لذلك $A+B$ هو من السعة 3×2 .

<u>تمرين</u> : اذا كان $\begin{bmatrix}a & 3\\ 1 & b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 8\\ c & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 11\\ 5 & -4\end{bmatrix}$ فجد كل من قيم a ، b و c ؟

ضرب مصفوفة بعدد: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة على الحقل F وليكن $k\in F$ (عدد قياسي) ، فان kA هو مصفوفة تعرف بالشكل التالي : $kA=[ka_{ij}]$.

<u>ملاحظات</u> : 1) اذا كان $k=-1$ فان $(-1)A=-A$.

2) $A+(-B)=A-B$.

<u>مثال</u> : لتكن $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ جد $3A$ و $(\frac{-1}{2})A$ ؟

الحل :

$$3A=\begin{bmatrix}3\times5 & 3\times-1 & 3\times2\\ 3\times0 & 3\times1 & 3\times1\\ 3\times0 & 3\times3 & 3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -3 & 6\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$(\frac{-1}{2})A=\begin{bmatrix}(\frac{-1}{2})\times5 & (\frac{-1}{2})\times-1 & (\frac{-1}{2})\times2\\ (\frac{-1}{2})\times0 & (\frac{-1}{2})\times1 & (\frac{-1}{2})\times1\\ (\frac{-1}{2})\times0 & (\frac{-1}{2})\times3 & (\frac{-1}{2})\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

المبرهنة التالية تعطي بعض الخواص الأساسية لعمليتي جمع المصفوفات و ضرب مصفوفة بعدد.

مبرهنة : اذا كانت $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ ، $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ و $C=\lfloor c_{ij}\rfloor$ ثلاث مصفوفات على الحقل F ومن نفس السعة وكان $r,s\in F$ فان :

1) $A+B=B+A$ 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ 3) $A+0=A$

4) $A+(-A)=0$ 5) $r(A+B)=rA+rB$ 6) $(r+s)A=rA+sA$

البرهان : 1) $A+B=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}+a_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}\rfloor+\lfloor a_{ij}\rfloor=B+A$

اذن $A+B=B+A$.

4) $A+(-A)=\lfloor a_{ij}\rfloor+(-\lfloor a_{ij}\rfloor)=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor -a_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+(-a_{ij})\rfloor=\lfloor a_{ij}-a_{ij}\rfloor=\lfloor 0\rfloor=0$

اذن $A+(-A)=0$.

5) $r(A+B)=r(\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor)=r\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor=\lfloor r(a_{ij}+b_{ij})\rfloor=\lfloor ra_{ij}+rb_{ij}\rfloor$

$=\lfloor ra_{ij}\rfloor+\lfloor rb_{ij}\rfloor=r\lfloor a_{ij}\rfloor+r\lfloor b_{ij}\rfloor=rA+rB$

اذن $r(A+B)=rA+rB$.

نترك (2) ، (3) و (6) كـ (واجب) .

<u>تمرين</u> : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ جد $3A-B$ ؟

<u>تمرين</u> : حل المعادلة المصفوفية (أي جد قيمة المصفوفة A) $A+2\begin{bmatrix}-1 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$.

الضرب الاقليدي : اذا كان $A=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ متجهاً صفياً و كان $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ .\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً ، فنعرف الضرب الاقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي : $AB=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

ضرب مصفوفتين: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من السعة $n\times k$ فان $AB=[c_{ij}]$ مصفوفة من السعة $m\times k$ ، حيث c_{ij} هو حاصل الضرب الاقليدي للصف i من المصفوفة A في العمود j من المصفوفة B ، أي ان $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

<u>ملاحظة</u> : عملية ضرب مصفوفتين لا تتحقق إلا في حالة كون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يكون مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ما عدا ذلك لا تتحقق عملية الضرب لمصفوفتين .

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ فجد كل من AB و BA ؟

الحل: نلاحظ ان عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B = 2 . عليه عملية الضرب متحققة.
أيضاً المصفوفة الناتجة AB تكون من السعة 2×2 ، أي ان $AB=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$. عليه سوف يكون $c_{ij}=\sum_{k=1}^{2}a_{ik}b_{kj}$ ، لذلك نحصل على ان :

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=(-1).1+2.2=3$$
$$c_{12}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=(-1).1+2.0=-1$$
$$c_{21}=\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k1}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=1.1+3.2=7$$
$$c_{22}=\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1.1+3.0=1$$

لذلك نحصل على $AB=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$.

نترك أيجاد BA كـ (واجب) .

ملاحظة هامة : يمكننا أيجاد حاصل ضرب المصفوفتين بالمثال السابق بالطريقة التالية وتعمم هذه الطريقة على جميع المصفوفات القابلة للضرب وكالآتي : نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{11} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الأول للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{12} في مصفوفة الضرب AB ، بعدها نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الأول للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{21} في مصفوفة الضرب AB ، و أخيراً نقوم بالضرب الاقليدي لعناصر الصف الثاني للمصفوفة A بعناصر العمود الثاني للمصفوفة B لنحصل على العنصر c_{22} في مصفوفة الضرب AB .

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1).1+2.2 & (-1).1+2.0\\ 1.1+3.2 & 1.1+3.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$$

ملاحظة : من الممكن أيجاد مصفوفتين $A \neq 0$ و $B \neq 0$ بحيث يكون $AB = 0$ ، فعلى سبيل المثال

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، لكن $AB = \begin{bmatrix} 1.0 + 0.0 & 1.0 + 0.1 \\ 0.0 + 0.0 & 0.0 + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

تمرين : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ فجد كل من AB و BA ان أمكن ذلك ؟

الاسبوع الرابع

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم طرق ايجاد معكوس المصفوفة هو حل المعادلات الخطية التي لايمكن حلها بسهولة بالطرق التقليدية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

11. أنشطة تفاعلية صفية
12. أسئلة عصف ذهني
13. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
14. واجب بيتي
15. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

9. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
10. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
11. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
12. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(طرق ايجاد معكوس المصفوفة)

المصفوفات القابلة للانعكاس

تعريف : اذا كانت A مصفوفة مربعة سعة n . يقال بان A قابلة للعكس (Invertible) اذا وجدت مصفوفة مربعة B سعة n بحيث ان $AB = BA = I$. نرمز لمعكوس المصفوفة A بالرمز A^{-1} أي ان $B = A^{-1}$ بحيث ان $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

مثال : اثبت ان $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ هي معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

الحل : نلاحظ ان

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

عليه $AB = BA = I$ أي ان $B = A^{-1}$.

مثال : اثبت ان المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس .

الحل : نفرض ان $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي معكوس للمصفوفة A ، لذلك $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}$

لكن لدينا $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عليه نحصل $\begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و لذا $c = 1$ و $c = 0$ وهذا تناقض . اذن A ليس لها معكوس .

مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للعكس و ليكن B و C معكوساً للمصفوفة A فان $C = B$.

البرهان : بما ان B هو معكوس للمصفوفة A اذن $AB = BA = I$.

بما ان C هو معكوس للمصفوفة A اذن $AC = CA = I$.

اذن $C = C.I = C(AB) = (CA)B = IB = B$ ، أي ان $C = B$.

من خلال المبرهنة أعلاه نستنتج ان كل مصفوفة قابلة للعكس فان معكوسها وحيد.

المبرهنة التالية تعطي بعض الخواص الأساسية للمصفوفات القابلة للعكس، حيث ان جميع المصفوفات الواردة في هذه المبرهنة تكون مربعة و من نفس الدرجة.

مبرهنة (للإطلاع) :

(1) ان معكوس المصفوفة الأحادية I هي نفسها ، أي ان $I^{-1} = I$.

(2) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس فان $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) اذا كان لكل من المصفوفتين A و B معكوس فان $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس وليكن $k \geq 1$ فان A^k مصفوفة قابلة للعكس وان $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^K$.

(5) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس وليكن $0 \neq r \in R$ فان rA أيضاً تكون مصفوفة قابلة للعكس وان $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

(6) اذا كانت A مصفوفة قابلة للعكس فان A^T أيضاً مصفوفة قابلة للعكس وان $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

المصفوفة الأولية (Elementary matrix) : هي مصفوفة مربعة سعة n ناتجة من المصفوفة المحايدة I_n بعد أجراء عملية واحدة فقط من العمليات الصفية الأولية عليها .

__مثال__ : المصفوفة $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة أولية ناتجة من المصفوفة المحايدة $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بعد ضرب الصف الثاني بالثابت 3 .

بينما $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة أولية ناتجة من المصفوفة المحايدة $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ بعد ضرب الصف الثالث بالثابت -1 وأضافته للصف الثاني .

كيفية أيجاد معكوس مصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة . لغرض أيجاد معكوس المصفوفة A نتبع الخطوات التالية :

(1) نستخدم العمليات الصفية لتحويل $[A|I]$ الى الصيغة المدرجة الصفية المختزلة و لتكن $[B|C]$.

(2) اذا كانت $B = I$ فان $C = A^{-1}$.

(3) اذا كانت $B \neq I$ فانه لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

<u>مثال</u> : جد معكوس المصفوفة (ان وجد) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل : نضع المصفوفة A بالصيغة التالية :

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2: r_1 + r_2,\ \ r_3: -2r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 : r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2: -r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1: -r_2 + r_1,\ \ r_3: -4r_2 + r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3: -r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2: -r_3 + r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

اذن A مصفوفة قابلة للعكس و معكوسها هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

مثال : جد معكوس المصفوفة (ان وجد) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

الحل : نضع المصفوفة A بالصيغة التالية :

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2:-4r_1+r_2,\ \ r_3:-7r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2:\frac{-1}{3}r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1:-2r_2+r_1,\ \ r_3:6r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

بما ان جميع عناصر الصف الأخير للمصفوفة اليسرى هو أصفار، اذن لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

تمرين : احسب معكوس كل من المصفوفات التالية (ان وجد) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

3 . محدد المصفوفة Determinant of matrix

ترميز: اذا كانت A مصفوفة مربعة من السعة n فان A_{ij} ترمز للمصفوفة الجزئية من الدرجة $n-1$ التي نحصل عليها من المصفوفة A بعد حذف الصف i والعمود j منها.

على سبيل المثال اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\1&-1&5\\6&2&3\end{bmatrix}$ فان : $A_{12}=\begin{bmatrix}1&5\\6&3\end{bmatrix}$ و $A_{33}=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}$.

تعريف المحدد : يقابل كل مصفوفة مربعة A على الحقل F عدد يسمى محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det(A)$. فإذا كانت $FG=\{A|$ مصفوفة مربعة على الحقل $A\}$ فان $\det : G\to F$
أي ان $\det(A)$ هو قيمة في F و ليس مصفوفة.
بمعنى أوضح سوف نعرّف المحدد استقرائياً كالآتي : لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من السعة n . فان

(1) اذا كان $n=1$ فان $|A|=a_{11}$.

(2) اذا كان $n=2$ فان $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

(3) اذا كان $n>2$ فان $|A|=a_{11}|A_{11}|-a_{12}|A_{12}|+a_{13}|A_{13}|-\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|$.

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| \ .$$

مثال : باستخدام التعريف احسب محدد كل من المصفوفتين $A=\begin{bmatrix}5&2\\-1&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-3&-1\\2&5&1\\0&1&6\end{bmatrix}$.

الحل : $|A|=(5\times1)-(2\times(-1))=5-(-2)=5+2=7$

$$|B|=1.\begin{vmatrix}5&1\\1&6\end{vmatrix}-(-3).\begin{vmatrix}2&1\\0&6\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}=1(30-1)+3(12-0)-1(2-0)=63$$

<u>تمرين</u> : باستخدام التعريف احسب محدد المصفوفتين $A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5 & 1\\ 6 & 3 & 5 & 2\\ 7 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

<u>ملاحظة</u> : يمكننا تقديم طريقة سريعة لحساب محدد المصفوفة من السعة 3 حصراً من خلال الآتي :

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ مصفوفة من السعة 3 ، فلغرض أيجاد المحدد لها نقوم بإضافة العمود الأول و العمود الثاني ثم نحسب المحدد بالشكل التالي :

$$|A|=\left[\begin{array}{ccc|cc}\overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & \underset{-}{a_{33}} & a_{31} & a_{32}\end{array}\right]$$

أي ان :

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

سوف نستخدم هذه الطريقة لحساب محدد المصفوفة B في المثال السابق و كما يلي :

$$|B|=\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & -3 & -1 & 1 & -3\\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1\end{array}\right]=30+0+(-2)-0-1-(-36)=63$$

<u>تمرين</u> : بدون استخدام التعريف احسب محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

<u>مثال</u> : لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & k & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ، ما هي قيمة الثابت k التي تجعل $|A|=0$.

الحل : نفرض ان $|A|=0$ ، عليه $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & k & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ أي ان

$$1(k+1)+1(-1+1)+1(1+k)=0$$

يؤدي الى ان $2k+2=0$ و بالتالي $2k=-2$ أي ان $k=\frac{-2}{2}=-1$.

<u>تمرين</u> : ا- عين قيمة λ بحيث يكون $\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & \lambda & -6\\ 1 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}$.

ب- لتكن كل من A و B مصفوفة مربعة :

(1) اذا كانت $A=0$ فاثبت ان $|A|=0$. هل العكس صحيح ؟

(2) اذا كانت $A=B$ فاثبت ان $|A|=|B|$. هل العكس صحيح ؟

الاسبوع الخامس والسادس

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة هو ايجاد حلول لانظمة المعادلات الخطية بطريقة منظمة وفعالة خاصة عندما يكون عدد المعادلات والمتغيرات كبيرا

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

16. أنشطة تفاعلية صفية
17. أسئلة عصف ذهني
18. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
19. واجب بيتي
20. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

13. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
14. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
15. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
16. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(امثلة عن حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة)

استخدام المعينات والمصفوفات في حل جملة معادلات خطية بعدة متحولات

درسنا في المحاضرات السابقة المعينات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها المعرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية أو فوق حقل الأعداد العقدية ثم قمنا بدراسة حل جملة معادلات خطية بمتحولين وبثلاث متحولات باستخدام المعينات (المحددات) من المرتبة الثانية والمرتبة الثالثة. ندرس في هذه المحاضرة حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف المتتالي للمجاهل وطريقة غوص.

6.1 جملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

- تسمى العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال للجملة
- وتسمى العناصر b_i المقادير الحرة (أو الثابتة)
- العناصر x_i المجاهل
- **كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت <u>الجملة متجانسة</u> وإذا كان احدها على الأقل غير معدوم سميت <u>الجملة غير متجانسة</u>.**

تسمى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

مصفوفة المعاملات.

والمصفوفة الموسعة $\overline{A}$ **التي هي :**

فإذا رمزنا

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر :

$$AX = B \qquad (4)$$

أن حل جملة المعادلات الخطية (1) يعني إيجاد جميع المتجهات X التي تحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة :

1- هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل .

2- إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حلا لها ؟

3- كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

6.2 حل جملة n معادلة و n مجهول

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

6.2.1 طريقة مقلوب المصفوفة:

من العلاقة (4) : $\qquad AX = B$

حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A نظامية غير شاذة أي $\Delta \neq 0$ فانه يوجد لـ A معكوس A^{-1}.

لذلك بضرب طرفي العلاقة (4) من اليسار بـ A^{-1} نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أو

$$X = A^{-1}B \qquad (5)$$

ويكون الحل **وحيدا**. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو متجه العمود X الذي جميع عناصره معدومة . تدعى هذه الطريقة **بالطريقة المصفوفية** لحل جملة المعادلات الخطية.

مثال 1: حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

كنا وجدنا في المثال (1) من المحاضرة السادسة أن $\Delta = \det A \neq 0$ وان :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فان :

$$= A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد أن الحل هو

$$x_1 = 13 \,, \quad x_2 = -12 \,, \quad x_3 = 4$$

6.2.2 طريقة كرامر:

أن الصعوبة العملية سابقا كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A ولكن الصيغة (5) تسمح بإيجاد طريقة أكثر عملية لإيجاد الحل وتتلخص كما يلي :

لدينا $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\Gamma(A)$

حيث $\Gamma(A)$ ملاصق A (أي منقول مصفوفة المتممات الجبرية):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots\dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث A_{ij} هو عامل (المتمم الجبري) للعنصر a_{ij} وبالتالي :

$$X = \frac{1}{\Delta}\Gamma(A)B$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

حيث Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من معين المصفوفة A بعمود المقادير الحرة (أو الثابتة) B .

- إذا كان $\Delta \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = 1,2,.....,n$$

- أما إذا كان $\Delta = 0$ نميز حالتين :

الحالة الأولى : $\Delta_i \neq 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ جملة المعادلات الخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية : $\Delta_i = 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول. **تدعى هذه الطريقة بطريقة كرامر**

مثال 2: استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال (1).

بما أن $\Delta \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = 1,2,3$$

أي أن :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13 \, , x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12$$

الاسبوع السابع والثامن

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم دراسة الدوال الخطية والمثلثية ومشتقاتها هو تمثيل العلاقات الرياضية وحل المشاكل الفيزيائية والهندسية وتطوير النماذج الرياضية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

21. أنشطة تفاعلية صفية
22. أسئلة عصف ذهني
23. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
24. واجب بيتي
25. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

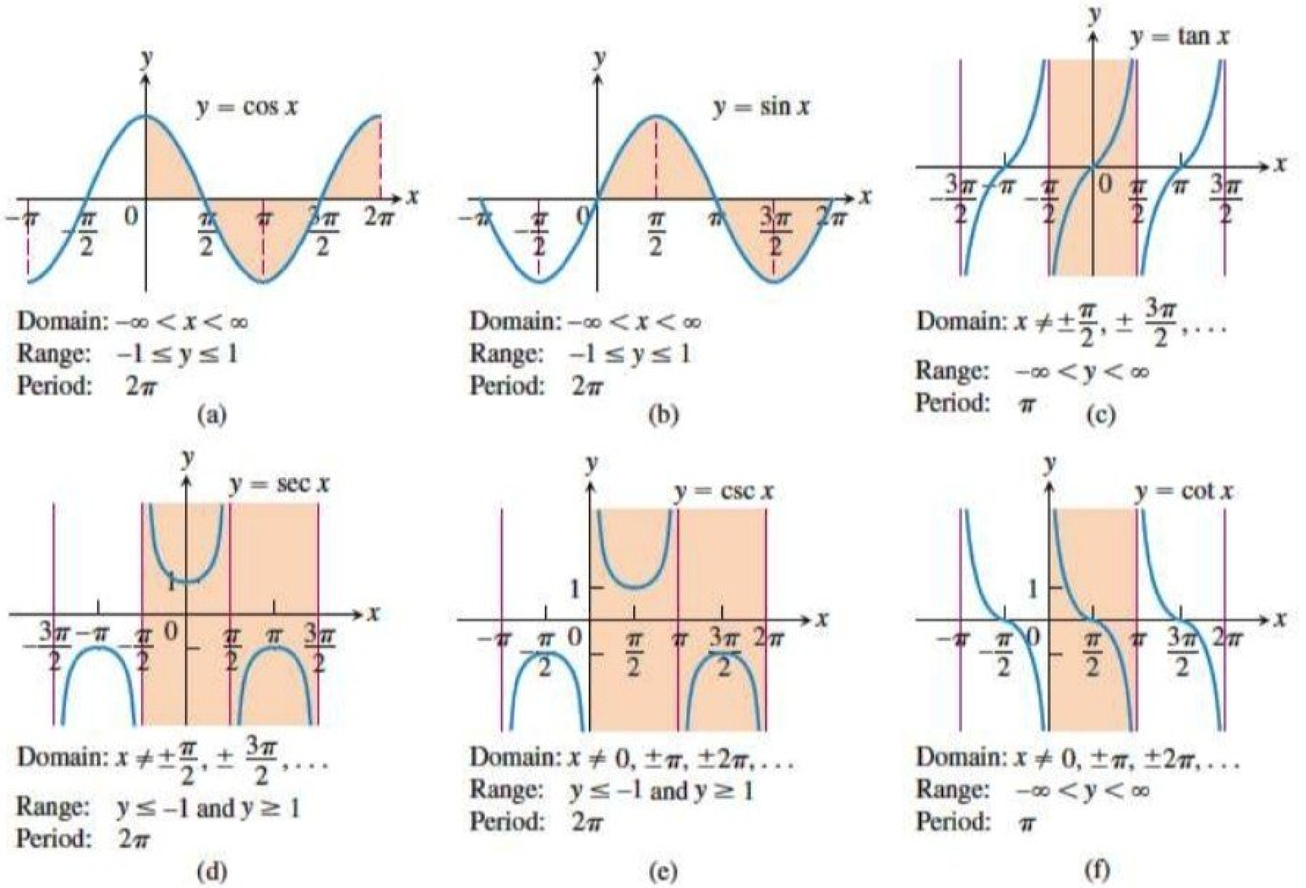
أساليب التقويم:

17. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
18. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
19. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
20. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تطبيق عن الدوال الخطية والمثلثية ومشتقاتها)

Trigonometric functions الدوال المثلثية



(a) Domain: $-\infty < x < \infty$; Range: $-1 \le y \le 1$; Period: 2π

(b) Domain: $-\infty < x < \infty$; Range: $-1 \le y \le 1$; Period: 2π

(c) Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$; Range: $-\infty < y < \infty$; Period: π

(d) Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$; Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$; Period: 2π

(e) Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$; Period: 2π

(f) Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; Range: $-\infty < y < \infty$; Period: π

متطابقات مثلثية :

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$

2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

6. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Period π: $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$

Period 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sec(x + 2\pi) = \sec x$, $\csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sec(-x) = \sec x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\csc(-x) = -\csc x$

$\cot(-x) = -\cot x$

مشتقات الدوال المثلثية :

1. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \,.\, \frac{du}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \,.\, \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u . \frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u . \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \,.\, \frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \,.\, \frac{du}{dx}$

(dy/dx) y'

1. $y = \sin^3 \frac{x}{3} - 3 \sin \frac{x}{3}$

2. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

3. $y = \tan^2(\cos x)$

4. $y = \tan t \quad , \qquad x = \sec t$

1. $$y' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \times \frac{1}{3} - 3 \cos \frac{x}{3} \times \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3}$$
$$= \cos \frac{x}{3} \left(\sin^2 \frac{x}{3} - 1 \right) = -\cos^3 \frac{x}{3}$$

---

2. $y' = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x + 2 \sin x - 2 \sin x = x^2 \cos x$

---

3. $y' = -2 \tan(\cos x) \sec^2(\cos x) \sin x$

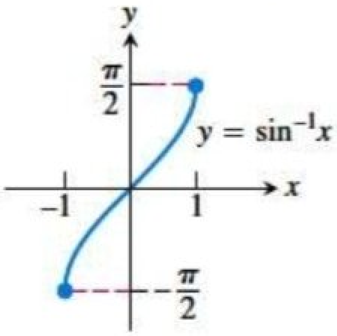
---

4. $\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad , \qquad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1/\cos t}{\sin t/\cos t} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

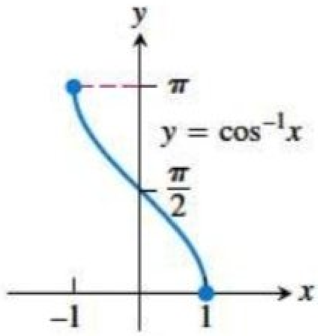
Inverse trigonometric functions الدوال المثلثية العكسية

Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



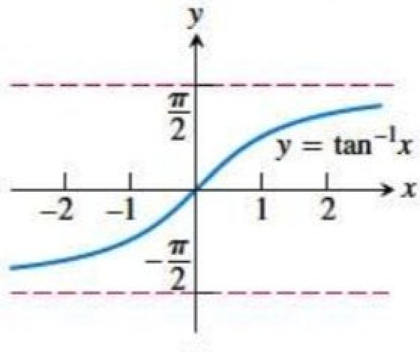
(a)

Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $0 \le y \le \pi$



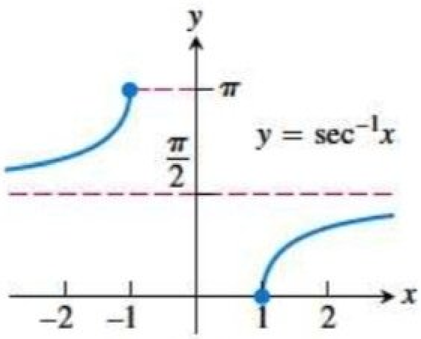
(b)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



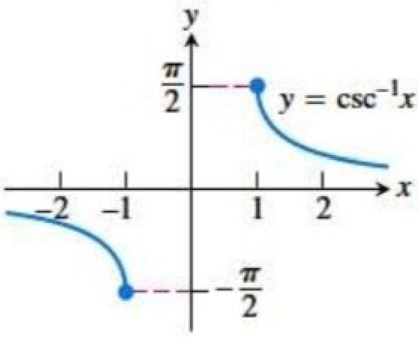
(c)

Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $0 \le y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$



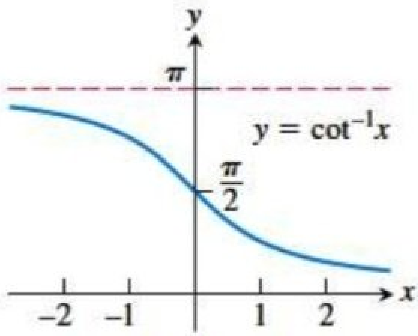
(d)

Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$



(e)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $0 < y < \pi$



(f)

بعض الخصائص :

1. $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$
2. $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$
3. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$
4. $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
5. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
6. $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$
7. $\csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

1. $y = \tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$

2. $y = x\ \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

3. $y = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x$

4. $y = x\cos^{-1} 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

1. $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

---

2. $$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$$

---

3. $$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

---

4. $$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \cos^{-1} 2x - \frac{-8x}{4\sqrt{1-4x^2}} = \cos^{-1} 2x$$

تمارين

[illegible]. $y = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x$

2. $y = \csc^{-1}(x^2+1)$

3. $y = \cot^{-1}(1/x) + \tan^{-1} x$

4. $y = \csc^{-1}(\sec x)$

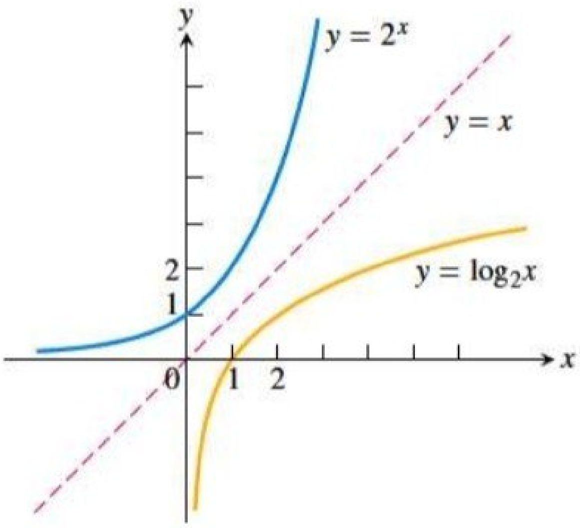
5. $y = 1 - \sin t \ \ , x = t - \sin t$

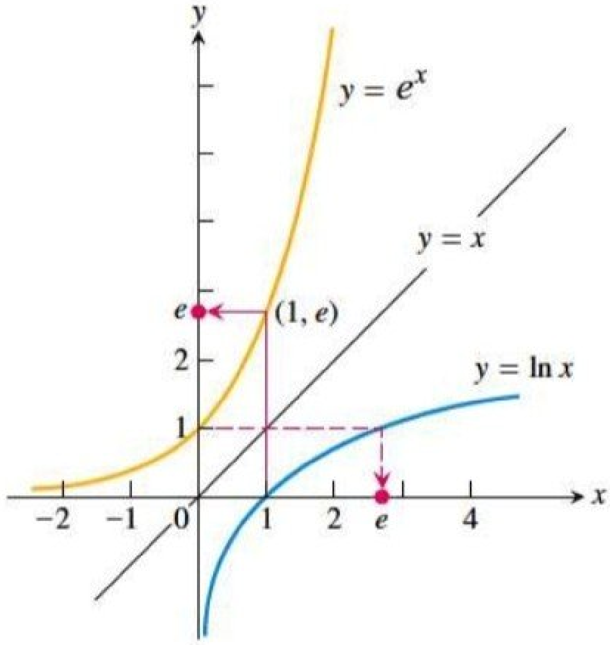
6. $y = \tan t \ \ , x = \sec^2 t - 1$

7. $y = \sin(\cos(2x-1))$

8. $y = \sqrt{1-\cos(x^2)}$

Logarithm function & Exponential function a^x والدالة الاسية $\log_a x$ الدالة اللوغاريتمية





قواعد اللوغاريتمات

$1.\log_a(x\,.\,y) = \log_a x + \log_a y$ $\quad$ $2.\log_a(x\,/y) = \log_a x - \log_a y$

$3.\log_a x^n = n\log_a x$ $\quad$ $4.\log_a a = 1$

$5.\log_a a^x = x$ $\quad$ $6.\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$

منطلق ومدى الدالة اللوغاريتمية :

$$Range:\ -\infty < y < \infty \qquad Domain = \{u|u>0\} \qquad u = u(x) \quad y = \log_a u$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

$$* \ \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}\,.\frac{du}{dx} \qquad ** \ \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{u}\,.\frac{du}{dx}$$

قواعد الأسس

$1.\ a^{x+y} = a^x.a^y$ $\quad$ $2.\ a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\quad$ $3.\ (a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad$ $4.\ a^u = e^{u\,ln\,a}$

مشتقة الدالة الأسية :

$$* \ \frac{d}{dx}a^u = a^u\,.\frac{du}{dx}\,.\ln a \qquad ** \ \frac{d}{dx}e^u = e^u\,.\frac{du}{dx}$$

منطلق ومدى الدالة الأسية :

$$Range:\ \{y|y>0\} \qquad Domain:\ -\infty < u < \infty \qquad u = u(x) \quad y = a^u$$

العلاقة بين الدالة الاسية اللوغاريتمية

$$y = \log_a x \qquad \leftrightarrow \qquad x = a^y$$

1. $y = \log_5(3 - x^2)$ 2. $y = \log(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

1. $3 - x^2 > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 3 < 0 \;\rightarrow\; D = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

2. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \;\rightarrow\; x^3 - x - 2x^2 + 2 > 0 \rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) > 0$

$(x^2 - 1)(x - 1) > 0 \;\rightarrow\; (x - 1)(x + 1)(x - 2) > 0$

$x = 1, -1, 2$

$x^3 - 2x^2 - x + 2$	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	x	
	-12	-2	$(-\infty, -1]$
	2	0	$(-1,1)$
	-0.625	1.5	$(1,2)$
	8	3	$(2, \infty)$

$D = (-1,1) \cup (2, \infty)$

1. $-8 = \log 2x$ 2. $\log(3x - 5) = 2$ x

1. $2x = 10^{-8} \;\rightarrow\; x = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

2. $3x - 5 = 10^2 \;\rightarrow 3x = 100 + 5 \;\rightarrow\; x = 35$

y'

1. $y = x^3 \ln 2x$ 2. $y = \tan^{-1}(e^x)$ 3. $y = \ln(x^2 + 4) - x \tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

4. $y = \log_5(x^2 + 5x)$

1. $y' = \dfrac{x^3 \times 2}{2x} + 3x^2 \times \ln 2x = x^2 + 3x^2 \ln 2x = x^2(1 + 3\ln 2x)$

2. $y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$

3. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4} - \left(\dfrac{x \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2x}{x^2 + 4} - \dfrac{2x}{4 + x^2} - \tan^{-1}\dfrac{x}{2} = -\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

4. $y' = \dfrac{2x + 5}{(x^2 + 5x)\ln 5}$

تمارين

1. $\log(3x-1)=-3$
2. $\log(7x-12)=2$

3. $y=\log(x^3-4x)$
4. $y=\log\left(\sqrt{x^2-4}\right)$

5. $y=\ln(x^2+x)$
6. $y=\ln(\ln x)$
7. $y=e^{\sin^{-1}x}$
8. $y=2^{\sec x}$
9. $y=x\sin(\log_7 x)$
10. $y=x\tan^{-1}x-\ln\sqrt{x}$
11. $y=(x^2+1)\tan^{-1}x$

الاسبوع التاسع والعاشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم تطبيق الدوال الاسية واللوغارتيمية ومشتقاتها يكمن في فهم الظواهر الطبيعية والعمليات الرياضية التي تصفها هذة الدوال

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

26. أنشطة تفاعلية صفية
27. أسئلة عصف ذهني
28. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
29. واجب بيتي
30. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

21. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
22. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
23. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
24. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تطبيق عن الدوال الخطية و المثلثية و مشتقاتها)

الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية ذات الأساس a تكتب بالصيغة

$$f(x) = \mathrm{a}^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر ($\mathrm{a} > 0$).

المجال (أو المنطلق) للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$$f(x) = 4^x \quad , \quad f(x) = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

بعض خصائص الدالة الاسية:

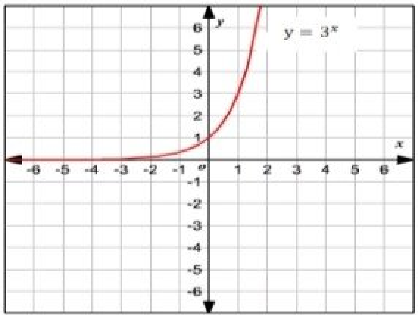
- $\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$
- $\mathrm{a}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \left(\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\right)^{\mathrm{m}} = \left(\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{m}}$
- أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فان $\mathrm{a}^x > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $\mathrm{a}^{x+\mathrm{y}} = \mathrm{a}^x \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$
- $\mathrm{a}^{x-\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}^x}{\mathrm{a}^{\mathrm{y}}}$
- $\mathrm{a}^0 = 1$
- أذا كان $\mathrm{a} > 1$ ، فان a^x دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ ، فان a^x دالة متناقصة.
- a^x دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $\mathrm{a} = 1$ ، فان $\mathrm{a}^x = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 3^x \quad , \quad \mathrm{g}(x) = 2^{-x} \quad , \quad \mathrm{h}(x) = 5^{-x} \quad , \quad \mathrm{u}(x) = 4^x$$

الحل: الدالة $f(x) = 3^x$

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty) \quad , \quad \mathrm{R}_f = (0, \infty)$$

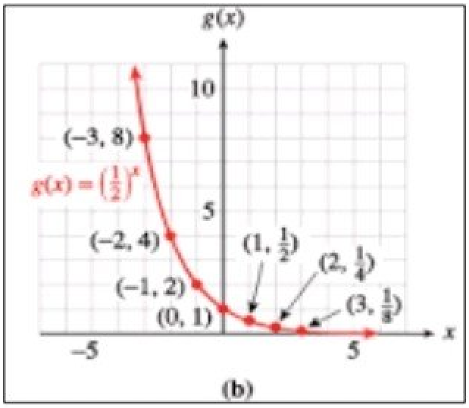


x	-4	-2	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty,\infty)$.

أما الدالة $g(x) = 2^{-x}$

$$D_g = (-\infty,\infty) \qquad , \qquad R_g = (0,\infty)$$



x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty,\infty)$.

تفاضل وتكامل الدالة الاسية

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad , \qquad a > 0\,, a \neq 1$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2 \cdot (6x+4)$$
$$= (48x+32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = x^2\, 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\, 3^x (x\ \ln 3 + 2)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^{t^4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot \ln 4 \cdot (4t^3)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل:

$$y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot \ln 2 \cdot (2 + 2t)$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2\,(7^{2x+3})\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right) dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\} dx$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)} \right\}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} - 1}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5} - 1}{\ln(4/5)}$$

$$= \frac{-2/5}{\ln(3/5)} + \frac{-1/5}{\ln(4/5)} .$$

Natural Exponential Function $y = e^x$ الدالة الاسية الطبيعية

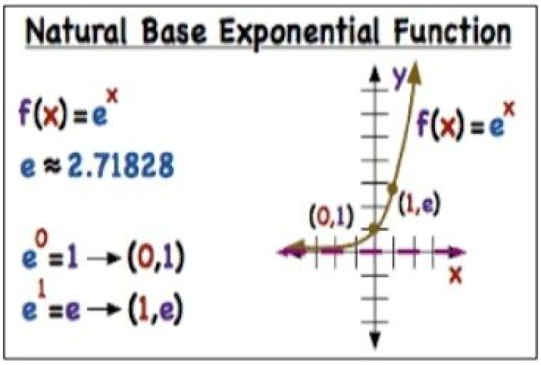
يعرف العدد e كالاتي:

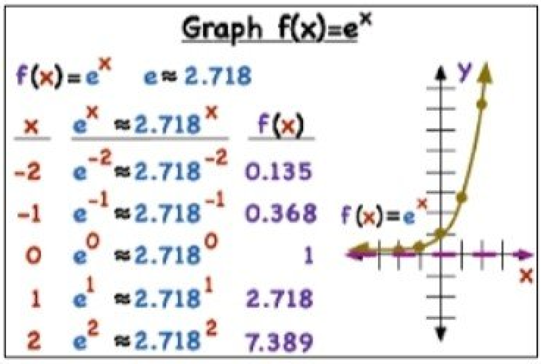
$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$e = 2.718281828459045 \ldots$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y = e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.





تفاضل الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{-x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-2x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{3x}\sin(2x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot (2\cos(2x)) + \sin(2x) \cdot (3e^{3x})$$
$$= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = -5\, e^{\sin x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\, e^{\sin x} \cdot (\cos x) = -5\cos x \cdot e^{\sin x}$$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^{u}\, du = e^{u} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\, e^{x^2}\, dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^{x}+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بــ e^{-x} فنحصل على

$$\int \frac{dx}{e^{x}+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

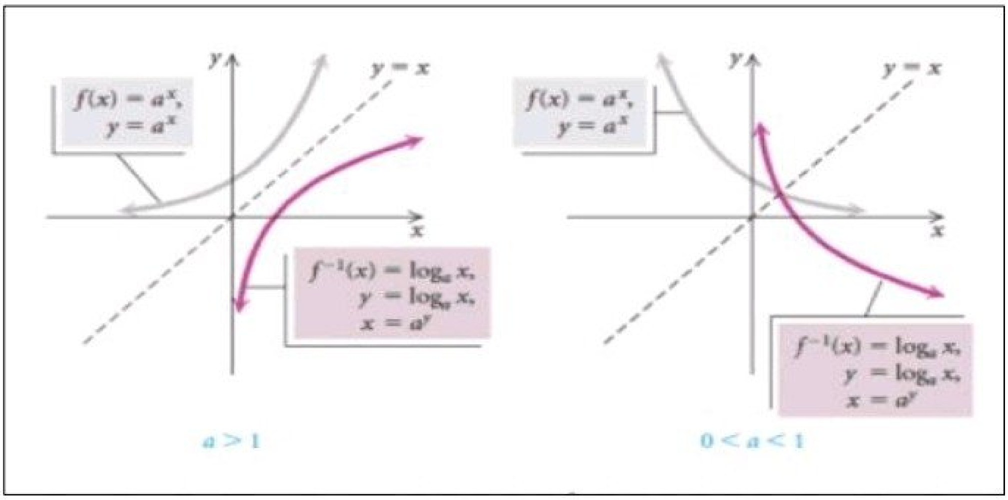
يطلق على معكوس $f(x) = a^{x}$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بــ $\log_a x$. هذا يعني أنه اذا كانت

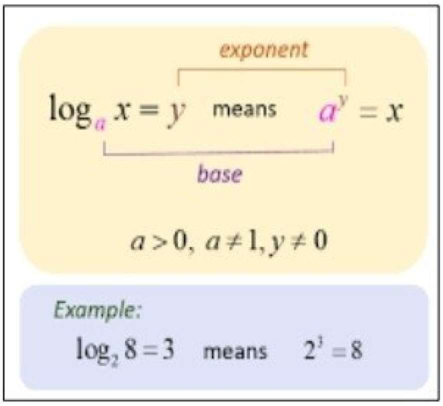
$$f(x) = a^{x} \quad , \; a > 0 \,, \qquad a \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

كما يظهر التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. منطلق دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.





الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a > 0$ و $a \neq 1$ و x, y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3) $\log_a(1) = 0$

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

5) $\log_a(a) = 1$

6) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x) \qquad \text{where} \quad r \in \mathbb{R}$

7) $a^{\log_a(x)} = x$

8) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

9) $\log_a(a^x) = x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$\log_3(81)$, $\log_5(\sqrt{5})$, $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$, $\log_2(2)$

$\log_8(512)$, $\log_4(4^{3.2})$, $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$, $\log_{16}(\sqrt{2})$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81) = y$

نكتب بصيغة اسية $3^y = 81$

$3^y = 3^4$

خاصية المساواة في الأسس $y = 4$

ولهذا فأن $\log_3(81) = 4$

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5}) = y$

نكتب بصيغة اسية $5^y = \sqrt{5}$

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$

خاصية المساواة في الأسس $y = \frac{1}{2}$

ولهذا فأن $\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

تفاضل الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $y = \log_a(u)$ حيث $a > 0\,, a \neq 1$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

فأن:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 - 5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2+4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2+4} \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3 \sqrt{x^2+1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f \circ g)_{(x)}$ ، $(g \circ f)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g\big(f(x)\big) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x \cdot \log_a(a) = x \cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

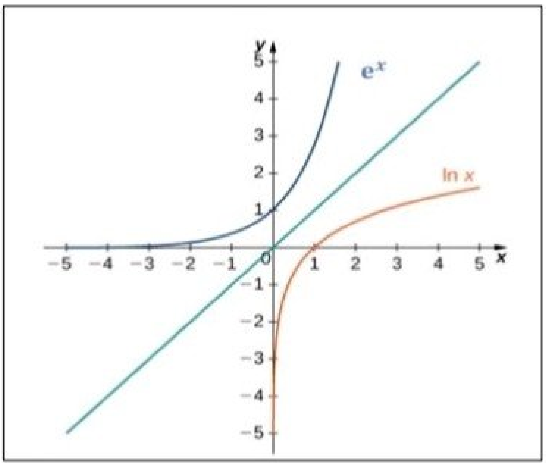
دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

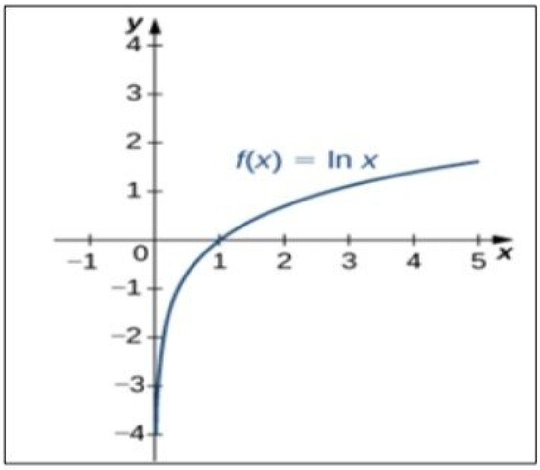
أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $x = 10^y$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0 \quad \text{and} \quad \ln(e^x) = x \text{ for all } x}$$





أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. وأن

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

وأستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln\frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

تفاضل اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x\cdot 0 - 1\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7\ln(4x)$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \csc x\cdot\sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x+1))^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\ln(3x+1))^{1/2}\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

الاسبوع الحادي عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم التفاضل الجزئي هو فهم كيفية تغيردالة متعددة المتغيرات بالنسبة الى احد هذة المتغيرات مع تثبيت المتغيرات الاخرى

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

31. أنشطة تفاعلية صفية
32. أسئلة عصف ذهني
33. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
34. واجب بيتي
35. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

25. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
26. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
27. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
28. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تمارين عن موضوع التفاضل الجزئي التفاضل الضمني)

المشتقات الجزئية Partial Derivatives

تعريف:

لتكن $f(x,y)$ دالة معرفة في المنطقة $D \subseteq \mathbb{R}^2$. تعرف المشتقتان الجزئيتان كالاتي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$$

وتعرف مشتقات الدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر بطريقة مشابهة.

أما المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة الاصلية (أو المشتقات الثانية) تعرف كالاتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_x(x + \triangle x, y) - f_x(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_y(x, y + \triangle y) - f_y(x,y)}{\triangle y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_x(x, y + \triangle y) - f_x(x,y)}{\triangle y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_y(x + \triangle x, y) - f_y(x,y)}{\triangle x}$$

المشتقات الجزئية f_{xy} و f_{yx} تسمى مشتقات جزئية مختلطة.

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xy^2 + x^2y + 3$ ، أوجد f_x و f_y بأستعمال التعريف.

الحل: لأيجاد $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

$$f(x + \triangle x, y) = (x + \triangle x)y^2 + (x + \triangle x)^2\, y + 3$$

$$= xy^2 + \triangle\, xy^2 + x^2y + 2x \triangle xy + (\triangle x)^2\, y + 3$$

$$f(x + \triangle x, y) - f(x,y)$$

$$= xy^2 + \triangle\, xy^2 + x^2y + 2x \triangle xy + (\triangle x)^2\, y + 3 - xy^2 - x^2y - 3$$

$$= \triangle x\, y^2 + 2x \triangle x\, y + (\triangle x)^2\, y$$

$$=\triangle x\,(y^2+2xy+\triangle x\, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x\,(y^2+2xy+\triangle x\, y)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}(y^2+2xy+\triangle x\, y)$$

$$=y^2+2xy$$

ولأيجاد $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}$$

$$f(x,y+\triangle y)=x(y+\triangle y)^2+x^2(y+\triangle y)+3$$

$$=x(y^2+2y\ \triangle y+(\triangle y)^2)+x^2(y+\triangle y)+3$$

$$=xy^2+2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2y+x^2\triangle y+3$$

$$f(x,y+\triangle y)-f(x,y)$$

$$=xy^2+2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2y+x^2\triangle y+3-xy^2-x^2y-3$$

$$=2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2\triangle y$$

$$=\triangle y\,(2xy\ +x\triangle y+x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle y\,(2xy\ +x\triangle y+x^2)}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}(2xy\ +x\triangle y+x^2)$$

$$=2xy\ +x^2$$

ملاحظة:

قواعد تفاضل حاصل ضرب دالتين، دالة الدالة، والدالة الكسرية تعتبر صحيحة في المشتقات الجزئية.

مثال: اذا كانت $f(x,y)=x\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ ، أوجد f_x و f_y .

الحل:

$$f_x=x\,y\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(2x)\right)+\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(y)=2x^2y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$=(2x^2+1)y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$f_y=x\,y\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(2y)\right)+\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(x)=2xy^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$=(2y^2\ +1)x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = e^{\sin(y/x)}$ ، أوجد f_x و f_y حيث $x \neq 0$.

الحل:

$$f_x = e^{\sin(y/x)} \cdot \cos(y/x) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$
$$= \frac{-y}{x^2} \cdot \cos(y/x) \cdot e^{\sin(y/x)}$$

$$f_y = e^{\sin(y/x)} \cdot \cos(y/x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \cos(y/x) \cdot e^{\sin(y/x)}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xy^4 - 2x^2y^5 + 4x^6 - 3y^2$. جد كلاً من $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. ماذا تلاحظ في هذا المثال؟.

الحل: نوجد أولاً $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^4 - 4xy^5 + 24x^5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 4xy^3 - 10x^2y^4 - 6y$$

الان

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = 4y^3 - 20xy^4 = 4y^3(1 - 5\,x\,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} = 4y^3 - 20xy^4 = 4y^3(1 - 5\,x\,y)$$

نلاحظ في هذا المثال أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال: اذا كانت $f(x,y)=\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$. جد f_x و f_y وبين منطلق كل منهما.

الحل:

$$f_x=\frac{(x^2+y^2)\cdot(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

واضح أن منطلق f_x هو

$$\mathrm{D}_{f_x}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن

$$f_y=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

كذلك منطلق f_y هو

$$\mathrm{D}_{f_y}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)=3x^2+y^2$

الحل: المطلوب إيجاد $f_{xx}\ ,\ f_{yy}\ ,\ f_{xy}\ ,\ f_{yx}$

$$f_x=6x\quad,\quad f_{xx}=6\quad,\quad f_{xy}=0$$
$$f_y=2y\quad,\quad f_{yy}=2\quad,\quad f_{yx}=0$$

مثال: اذا كانت $f(x,y)=x\cos(xy)\,e^{xy}+\sin y$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=y\cos(xy)\,e^{xy}+\sin x$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=(x-y)\sin(x+y)$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=y\cos^6(x^2)$. جد f_x و f_y

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)=\sin(xy^2)+\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

المطلوب إيجاد: $f_{xx}\ ,\ f_{yy}\ ,\ f_{xy}\ ,\ f_{yx}$

الاسبوع الثاني عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم امثلة عن التفاضل العددي باستخدام طريقة شبة المنحرف هو فهم كيفية تقريب قيمة التكامل المحدد للدالة عندما يكون من الصعب ايجاد الحل بستخدام الطرق التقليدية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

36. أنشطة تفاعلية صفية
37. أسئلة عصف ذهني
38. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
39. واجب بيتي
40. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

29. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
30. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
31. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
32. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(امثلة التفاضل العددي طريقة شبة المنحرف)

Numerical Differentiatian الاشتقاق العددي

سنتعامل في هذا البند مع الطرق التقريبية العددية لايجاد المشتقة الاولى والثانية الدوال الرياضية.

1- المشتقة من الدرجة الاولى First derivative

لناخذ الدالة $f(x)$, ولنجد مفكوك تيلر للدالة عند نقطة تبعد عنها مسافة صغيرة h اي $f(x+h)$

او

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (1)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots$$

وباهمال الحدود التي تحوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

هذا ما يسمى " تقريب الاختلاف الامامي " للمشتقة Forward difference approximation

الان لنحاول ايجاد مفكوك الدالة $f(x)$ عند نقطة مجاورة تقع قبل النقطة بمسافة $(-h)$ اي ان $f(x-h)$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

وباعادة ترتيب الحدود

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots$$

وباهمال الحدود التي تحوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

هذا ما يسمى " تقريب الاختلاف الخلفي " للمشتقة backward difference approximation

الان لناخذ المعادلتين

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \quad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من (1) نحصل على:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) +$$

وباهمال الحدود التي تحوي لى المشتقة الثالثة صعودا نحصل على:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

هذا ما يسمى " تقريب الاختلاف المركزي " للمشتقة Central difference approximation

مثال -1– استخدمي التقريب الامامي لايجاد القيمة التقريبية لمشتقة الدالة: $\cos(x)$ عند النقطة $x = \pi/3$,

افرضي ان المسافة الفاصلة h تاخذ القيم التالية:

$(a) h = 0.1$ $\quad$ $(b)\ h = 0.01$ $\quad$ $(c) h = 0.001$ $\quad$ $(d)\ h = 0.0001$

الحل

تقريب الاختلاف الامامي

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f(x) = \cos(x), \quad x = \pi/3$

$(a)h = 0.1$

$$f'(\pi/3\ ) \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\ + 0.1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0.1} = \frac{0.41104 - 0.5}{0.1} = -0.88951$$

$(b)\ h = 0.01$

$$f'(\pi/3\ ) \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\ + 0.01\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0.01} = \frac{0.49131 - 0.5}{0.01} = -0.86851$$

$(c)h = 0.001$

$$f'(\pi/3\ ) \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\ + 0.001\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0.001} = -0.866851$$

$(d)h = 0.0001$

$$f'(\pi/3\ ) \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\ + 0.0001\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0.0001} = -0.86605$$

الحل المضبوط

$$f(x) = \cos(x)\ \rightarrow\ f'(\pi/3) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.86575983$$

نسبة الخطاء

مثال -2 –

افرضي ان الدالة $f(x) = \ln(x)$. استخدمي الاختلاف الامامي والمركزي لايجاد القيمة التقريبية لمشتقة الدالة عند النقطة $a = 3$ استخدمي قيمة المسافة:

$(a) h = 0.1 \qquad (b)\ h = 0.01$

الحل

الاختلاف الامامي

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(x) = \ln(x), \quad a = 3$

$(a) h = 0.1$

$$f'(3) \approx \frac{ln(3 + 0.1) - ln(3)}{0.1} = \frac{1.10194 - 1.09861}{0.1} = 0.332779$$

$h = 0.01$

$$f'(3) \approx \frac{ln(3 + 0.01) - cos(3)}{0.01} = \frac{1.131402 - 1.09861}{0.1} = 0.327898$$

الاختلاف المركزي

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$h = 0.1$

$$f'(3) \approx \frac{ln(3 + 0.1) - ln(3 - 0.1)}{2 \times 0.1} = \frac{1.131402 - 1.06471}{0.2} = 0.333456$$

$h = 0.01$

$$f'(3) \approx \frac{ln(3 + 0.01) - ln(3 - 0.01)}{2 \times 0.01} = \frac{1.10194008 - 1.0952733}{0.02} = 0.333345$$

جدي نسبة الخطاء

1- المشتقة من الدرجة الثانية   Second derevative

للحصول على تعبير رياضي تقريبي للمشتقة الثانية, لتكن الدالة $f(x)$, و ولنحاول ايجاد مفكوك تيلر للدالة عند نقطتين قيبتين وهما: $f(x+h)$ & $f(x-h)$.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (2)$$

وبجمع هاتين المعادلتين:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + 2\,\frac{h^4}{4!}\,f^{IV}(x) + \cdots$$

او

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^4}{12}\,f^{IV}(x) + \cdots$$

وباهمال الحدود $\frac{h^2}{12}\,f^{IV}(x)$ صعودا نحصل على :

$$\boxed{f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

مثال – 3-

اذا كانت المسافة التي يقطعها متسابق مقاسة من نقطة ثابتة مقاسة بالامتار ولكل نصف ثانية هي كالاتي:

t (sec)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
x(m)	0.0	3.65	6.8	9.9	12.15

استخدمي الاختلاف المركزي التقريبي لايجاد تعجيل اللاعب عند الزمن $t = 1.5\ s$

الحل

التعجيل هو المشتقة الثانية للمسافة اي ان

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

$$f''(1.5) \approx \frac{x(2.0)-2x(1.5)+x(1.0)}{0.5^2} = \frac{12.15-2(9.9)+6.8}{0.5^2} - 3.4\ m/s^2$$

التكامل العددي **Numerical integration**

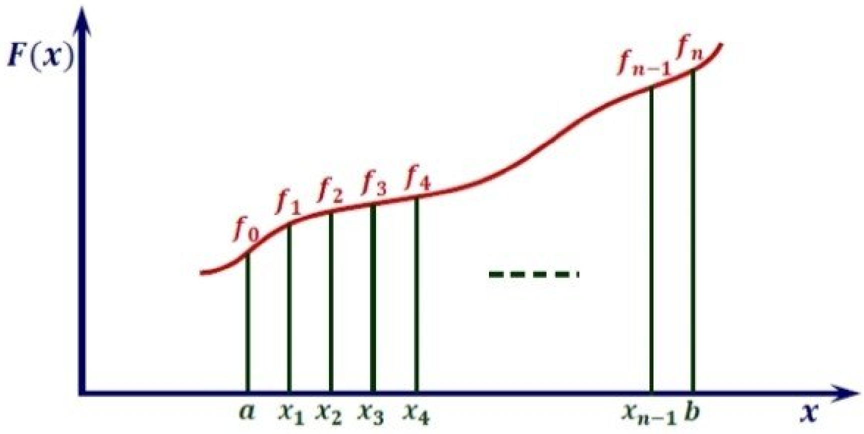
هناك العديد من الطرق العددية تستخدم في ايجاد الحل العددي للتكامل, وتستند هذه الطرق على اساس ان التكامل هو المساحة تحت المنحني. وسنتطرق الى بعض هذه الطرق.

1- طريقة شبه المنحرف

The Trapezoidal Rule:

(Based on line approximation).

Consider the function $y = f(x)$ for the interval $a \leq x \leq b$, shown in figure:



To evaluate the definite integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

We divided the interval $a \leq x \leq b$ into n subintervals each of length $h = \frac{b-a}{n}$

Then, the number of points between $x_0 = a$ & $x_n = b$ is:

$$x_1 = a + h$$

$$x_2 = a + 2h$$

$$x_3 = a + 3h$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = a + (n-1)h$$

Therefore, the integral from a to b is the sum of the integrals a to x_1, from x_1 to x_2, and so on. The total area is:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

The integral over these subinterval, can be approximated by the area of the trapezoidal:

$$I = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)h + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)h + \frac{1}{2}(f_2 + f_3)h + \cdots + \frac{1}{2}(f_{n-1} + f_n)h$$

$$I = \left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right]h$$

مثال – 1 – استخدمي طريقة شبه المنحرف لايجاد الحل اللتقريبي للتكامل التالي:

$$\int_1^2 x^2\ dx$$

على فرض ان الفترة مقسمة الى اربعة اجزاء $n = 4$. قارني الحل مع الحل المضبوط وجدي مقدار الخطاء.

Solution:

The exact value of the integral is:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.333333$$

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25 \qquad ; \qquad f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
1	1
1.25	1.5625
1.50	2.25
1.75	3.0625
2	4

$$I = \left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \tfrac{1}{2}f_4\right] h$$

$$I = \left[\tfrac{1}{2} + 1.5625 + 2.25 + 3.0625 + \tfrac{1}{2}4\right](0.25)$$

$$I = 2.34375 \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = 0.44\%$$

مثال – 2 – استخدمي طريقة شبه المنحرف لايجاد الحل اللتقريبي للتكامل التالي:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

على فرض ان الفترة هي $n = 5$ و $n = 10$. قارني الحل مع الحل المضبوط وجدي مقدار الخطاء.

Solution:

The exact value of the integral is:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = 0.693147$$

$$n = 5 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2-1}{5} = 0.2 \qquad ; \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

x	$f(x)$
1	1
1.2	0.833333
1.4	0.714285
1.6	0.625
1.8	0.555555
2	0.5

$$I = \left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \frac{1}{2}f_5\right] h$$

$$I = \left[\tfrac{1}{2} + 0.833333 + 0.714285 + 0.625 + 0.555555 + \tfrac{1}{2}0.5\right](0.2)$$

$$I = 0.695634 \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = 0.35\%$$

$$n = 10 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2-1}{10} = 0.1 \qquad ; \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

x	$f(x)$
1	1
1.1	0.909090
1.2	0.833333
1.3	0.769230
1.4	0.714285
1.5	0.666666
1.6	0.625
1.7	0.588235
1.8	0.555555
1.9	0.526315
2	0.5

$$I = \left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + \tfrac{1}{2}f_{10}\right]h$$

$$I = \left[\tfrac{1}{2}(1 + 0.5) + 6.187714\right](0.1)$$

$$I = 0.693771 \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = 0.09\%$$

الاسبوع الثالث عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم تمارين عن المعادلات التفاضلية الاعتيادية هو تطوير القدرة على فهم وتحليل و وصف الظواهر الديناميكية التي تتغير بمرور الوقت
مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

41. أنشطة تفاعلية صفية
42. أسئلة عصف ذهني
43. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
44. واجب بيتي
45. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

33. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
34. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
35. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
36. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تمارين عن المعادلات التفاضلية الاعتيادية)

في الرياضيات، بشكل عام المعادلات التفاضلية هي المعادلات التي يكون فيها المتغير هو دالة، حيث المعادلة تظهر العلاقة بين الدالة ومشتقاتها. حل المعادلات التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة، ومجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة (عائلة حلول)، كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة.

المعادلات التفاضلية مهمة جداً في تفسير الظواهر العلمية الفيزيائية والكيميائية. السبب في ذلك أننا نستطيع كتابة معادلات بمتغيرات كثيرة كدالة للمشتقات مثل سرعة وموقع الأجسام المختلفة، لذلك يلزم معرفة حل هذه المعدلات وكيفية التعامل معها. ويجدر التنويه أنه في حالات كثيرة لا يمكن حل المعادلة بصورة جبرية تامة.

لماذا المعادلات التفاضلية مفيدة؟

نحن نعيش في عالم تتغير فيه الظواهر باستمرار. ومع ذلك، يمكن وصف معظم هذه التحولات باستخدام المعادلات التفاضلية. على سبيل المثال، استخدم ألبرت أينشتاين معادلات تفاضلية لوصف قوة الجاذبية. بمساعدة هذه المعادلات، شرح هذه القوة وأثبت أنه من الممكن السفر إلى المستقبل.

مثال: العلاقة بين تعداد الأرانب والمعادلة التفاضلية

كلما زاد عدد الأرانب، زاد عدد الأرانب الصغيرة. سوف تنمو هذه الأرانب الصغيرة أيضًا وتتكاثر. لذلك، مع مرور الوقت، سيزداد عدد الأرانب أكثر فأكثر.

تعريف [1-1] Definition

المعادلة التفاضلية (Differential Equation) هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة اي للمتغير التابع في المعادلة .

ملاحظه

المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغير مستقل (independt variable) وليكن (x) ودالته غير المعروفة (dependt variable) (y) وبعض مشتقات (y) بالنسبة الى (x) ويرمز لها .OD.E والتي هي مختصر الى (Ordinary Differential Equation) .

مثلا

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $y' + x^2y + x = y$

3) $x^2y'' + 5xy' - x^3y = 0$

4) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

5) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2 y y' = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتيادية لان المتغير y يعتمد فقط على المتغير x

تعريف [1-2] Definition

الدرجة: تعرف درجة المعادلة التفاضلية بأنها : اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية

المرتبة او (الرتبة) : تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بانها رتبة اعلى مشتقة.

مثلاً:

1) $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

3) $y''' + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

4) $y'' + 2y(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

5) $\frac{dy}{dx} = x^3 - 5$ من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

6) $x^2\frac{dy}{dx} + (\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية.

ملاحظه

درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة التفاضلية : $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$
من الرتبة الثانية لان اعلى مشتقة فيها y''

حيث يمكن ازالة الجذور او الاسس الكسرية ونحصل على: $(y'')^4 = 1 + (y')^2$
وبذلك تكون درجة المعادلة التفاضلية الرابعة

[1-2] حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية.

(Solution of an Ordinary Differential Equation)

ان الغاية من دراسة المعادلات التفاضلية هي كيفية أيجاد حلولاً لها، ويتم ذلك بايجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) y والمتغير المستقل x بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وان تحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض.

Definition [1-3]تعريف

حل المعادلة التفاضلية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

أ) خالية من المشتقة

ب) م... معينة

جـ) تـ... ـضلية

اي ان الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أي دالة لمجهول (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال -١-

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

الحل:

$y = x^2 + 3x$ نجد y' فيكون :

$$(1).\ y= x^2+3x \qquad \text{so}\quad (2)\ \ y' =2x+3$$

نعوض (1) و (2) في الطرف الايمن والأيسر للمعادلة التفاضلية وكما يلي :

$$LHS = xy'$$

$$= x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$RHS = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x$$

$$= 2x^2 + 3x \ = LHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه

[1-3] الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما اسلفنا هو اي علاقة بين X، تحقق المعادلة ، غير ان الحل العام لاي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساو لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب ان يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى . اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا ....

فعلى سبيل المثال : $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويحققها الحل الخاص $y = e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية الى ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابت اختياري واحد c ، فيكون $y = ce^{5x}$ اما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ فهى من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة :
$y = \sin x,\ y = \cos x$ غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين، كان يكونا A,B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y = A \sin x + B \cos X$

مثال -2- اثبت ان $y = x \ln x - x$ احد حلول المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} = x + y\ ,\ x > 0 \ ....(1)$$

الحل : ان المعادلة $y = x \ln x - x$ خالية من المشتقات ومعرفة في $x > 0$ ولكي نثبت انها

احد حلول المعادلة التفاضلية (1) نقوم بالتعويض المباشر في (1)

$$LHS = x\frac{dy}{dx} = x.(x.\frac{1}{x} + \ln x.1-1)$$

$$= x.(1 + \ln x - 1) = x\ln x$$

$$RHS = x + y = x + x\ln x - x = x.\ln x$$

$$\rightarrow LHS = RHS$$

اذن الدالة المعطاة هي احد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال - 3-

$2y' - y = 0$ حلا للمعادلة $, a \in R \ \ln y^2 = x + a$

الحل:

$$\ln y^2 = x + a \Rightarrow 2 \ln y = x + a \Rightarrow 2\frac{1}{y}(y') = 1$$
$$\Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

$\ln y^2 = x + a$ حلا للمعادلة اعلاه $, so$

مثال - 4 -

هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل:

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^3 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

وعليه $y = x^3 + x - 2$ هو حلا للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

مثال - 5 -

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

الحل

$$y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$y' = -6 \sin 2x + 4 \cos 2x$$

$$y'' = -12 \cos 2x - 8 \sin 2x \;\ldots\ldots\; (2)$$

بالتعويض عن(1) , (2)، في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية ينتج :

$$LHS=(-12 \cos 2x - 8 \sin 2x)+4(3 \cos 2x + 2 \sin 2x)$$

$$= -12 \cos 2x-8 \sin 2x + 12 \cos 2x + 8 \sin 2x \quad = 0$$

هو حلا للمعادلة اعلاه.

مثال - 6 -

هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $yy'' + (y) - 3x = 5$ ؟

الحل:

$$y^2 = 3x^2 + x^2 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow$$

$$2y(y'') + y' (2)y' = 6 + 6x$$

بالقسمه على 2

الطرف الايمن $yy'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow LHS = yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$

$$\neq RHS$$

وعليه فان $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلا للمعادلة اعلاه.

[1-4] المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الاولى.

مقدمة :

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل، أي يقوم على عمليات التكامل ، ومن المعروف انه لا يمكن ايجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة . أي لا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة . وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى انواع متعددة

حسب طريقة الحصول على حلها العام.

وفي هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بمتغيرين yx .
ومع ان هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لاي منها بصورة عامة ، ولا توجد طريقة عامة للحل . وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن ايجاد حلها

بطريقة مباشرة الى عدة انواع ، اهمها :

1- المعادلات التي تنفصل متغيراتها .
2- معادلات تفاضلية من النوع المتجانس.
3- معادلات تفاضلية تامة
4- معادلات تفاضلية خطية - معادلة برنولي .
وفي هذا الفصل سنقتصر على النوعين (1) و (2) وطرائق حليهما .

فمثلاً تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى الشكلين الاتيين:

1) $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$

2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

حيث $N(x,y) \neq 0 , M(x, y) \neq 0$

فالمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{x+y}$ مثلا

يمكن ان تكتب بالشكل

$$(3xy)\, dx = (x+y)\, dy$$
$$(3xy)\, .dx - (x+y)\, .dy = 0$$

حيث ان $M = 3xy , \quad N= (x+y)$

سندرس في البند الاحق بعض طرق حل المعادله التفاضليه

[1-5] طرق حل المعادلات التفاضلية

اولا : المعادلات التي تنفصل متغيراتها (Separation of Variables)

في هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع ان نعزل كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y فقط مع dy في الجانب الآخر فتحصل على :

$f(x).dx = g(y)dy$ ...(1)

ثم نكامل طرفي المعادلة (١) فيكون

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث ثابت اختياري (**Arbitrary Constant**)

مثال - ١ - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = (2x+5)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2x+5 \Rightarrow dy = (2x+5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)\,dx \Rightarrow y=x^2+5x+c$$

مثال - 2 - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل

نجعل المعادلة بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

اي : $ydy = (x-1)dx$

باخذ التكامل للطرفين : $\int ydy = \int (x-1)\,dx$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$y^2 = x^2-2x+2c \Rightarrow y = \pm(x^2-2x+2c)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm(x^2-2x+2c)^{\frac{1}{2}}$$

لكون C ثابت اختياري فان 2c ثابت اختياري ايضاً اسميناه C1.

الاسبوع الرابع عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من تعلم حل المعادلات التفاضلية المتجانسة وفصل المتغيرات هو اكتساب المهارات اللازمة لتحليل وحل مجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية التي تظهر في مختلف العلوم

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

46. أنشطة تفاعلية صفية
47. أسئلة عصف ذهني
48. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
49. واجب بيتي
50. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

37. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
38. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
39. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
40. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة:

(تطبيق انواع وطرق حل المعادلات التفاضلية

فصل المتغيرات والمتجانسة)

المعادلات القابلة لفصل المتغيرات Separable Equations

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

الدالة $f(x,y)$ يجب أن تكون مستمرة بالنسبة للمتغير x.

<u>وتكون على عدة حالات:</u>

1) إذا كانت هذه المعادلة تابعة لـ x فقط:

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x) \cdot dx$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$y = \int f(x) \cdot dx + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

2) إذا كانت المعادلة تابعة لـ y فقط:

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dy = f(y) \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة.

3) إذا كانت المعادلة التفاضلية تابعة لـ x و y قابلة لفصل المتغيرات تكتب بالشكل التالي:

$$y' = f(x,y) \Rightarrow f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$$

حيث f_1, f_2, g_1, g_2 دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة لـ x و y على أي مجال مغلق من $\mathbb{R}$.

نقسّم طرفي المعادلة على المقدار: $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام لها بفصل المتغيرات.

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

تسمى بالمعادلة التي تنفصل متغيراتها أو قابلة لفصل المتغيرات.

ملاحظة هامة جداً: عند حل المعادلة التفاضلية المعطاة في السؤال يجب وضعها بالصيغة القياسية للحالات الثلاث أعلاه.

مثال 1: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = 1 + x$

الحل:

بقسمة طرفي المعادلة على x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x}$$

بقسمة الحدود البسط على الحد في المقام نجد أن

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$$

الان بضرب طرفي المعادلة في dx ينتج لدينا

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لـــ x نحصل على (لا تنسى إضافة ثابت التكامل لأنه تكامل غير محدد)

$$\Rightarrow \int dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx \Rightarrow y = \ln|x| + x + c$$

مثال 2: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y$

<u>الحل:</u>

بضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\frac{dx}{y}$ لغرض فصل المتغيرات نحصل على

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\, dx \Rightarrow \ln|y| = x^3 + c \Rightarrow y = e^{x^3+c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

<u>مثال 3:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$.

<u>الحل:</u>

نقوم بفصل المتغيرات بقسمة المعادلة التفاضلية على المقدار $(1-x)(1+y)$ فنجد أن

$$\frac{(1-x)}{(1-x)(1+y)}dy - \frac{(1+y)}{(1-x)(1+y)}dx = 0$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dx}{1-x} = 0 \Rightarrow \ln(1+y) + \ln(1-x) = c$$

باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نبسط المقدار أعلاه

$$\ln[(1+y)(1-x)] = c$$

وبأخذ e **للطرفين ينتج**

$$e^{\ln[(1+y)(1-x)]} = e^c \Rightarrow (1+y)(1-x) = c_1 \quad (e^c = c_1)$$

وهو الحل العام للمعادلة.

<u>ملاحظة:</u> يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متغيراتها مباشرة ولكنها تؤول الى معادلات تفاضلية قابلة للفصل فمثلاً ان المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad ; a, b, c \text{ ثوابت}$$

هي معادلة تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها مباشرة ولذلك نجري عليها التحويل الاتي:

أولاً نفرض أن

$$z = ax + by + c$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Rightarrow dz = a \cdot dx + b \cdot dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة أعلاه فيكون

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{b \cdot f(z) + a}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو

$$x = \int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} + c$$

<u>مثال:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x + y + 1$

<u>الحل:</u>

نكتب المعادلة بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

نلاحظ أنها غير قابلة لفصل المتغيرات مباشرة لذلك نفرض

$$z = x + y + 1$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Rightarrow dz = dx + dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الأساسية فيكون

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{1 + z}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x = \ln|1 + z| + \ln c$$

بارجاع قيمة z الى أصلها وهي $(z = x + y + 1)$

$$\Rightarrow x = \ln|x + y + 2| + \ln c$$

وباستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نجد أن

$$\Rightarrow x = \ln[(x + y + 2)c]$$

وبأخذ e للطرفين نجد أن

$$\Rightarrow e^x = e^{\ln[(x+y+2)c]} \Rightarrow c(x + y + 2) = e^x \Rightarrow y = e^x - c(x + 2)$$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$

2) $(y^2 + y)dx - (x^2 + x)dy = 0$

3) $\sin^2 x \, cosy \, dx + sinysecx \, dy = 0$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x^2}{yx}$

5) $x(1 - y)\dfrac{dy}{dx} + y(1 + x) = 0$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y)$

المعادلات من النوع المتجانس او المتجانسة **Homogeneous Equations**

لتكن المعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الأولى و الدرجة الاولى

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

حيث ان كلاً من M, N دوال.

تعريف: الدالة المتجانسة **Homogeneous Function**

يقال عن الدالة $f(x,y)$ التابعة للمتغيرين x و y بأنها متجانسة من الدرجة n إذا تحققت العلاقة

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

حيث $t \neq 0$ عدد حقيقي.

اذا كانت $n=0$ فان الدالة متجانسة من الدرجة صفر.

لمعرفة كون الدالة متجانسة أم لا يمكن اخراج t عامل مشترك بعد تبديل كل من (x,y) بـ (tx,ty) وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y) = x^3 - xy^2$ تكون متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - (tx)(ty)^2 = t^3(x^3 - xy^2) = t^3 f(x,y)$$

أما الدالة $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \sin\left(\frac{2y}{x}\right)$ فهي متجانسة من الدرجة صفر لأننا عندما نعوض بدل كل x, y بـــ tx, ty ستختصر t وتحذف

اما الدالة $f(x,y) = x + \sin y$ فهي دالة غير متجانسة.

تعريف: المعادلة التفاضلية المتجانسة

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي على الصورة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بأنها متجانسة إذا كانت كلاً من M, N دالة متجانسة ومن نفس الدرجة.

خطوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

1- **نفرض $y = vx$.**
2- **نشتق (1) بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.**
3- **نضرب المعادلة $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ بالمقدار dx فنحصل على $dy = vdx + xdv$.**
4- **نعوض قيمتي y, dy في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابلة لفصل المتغيرات والتي من السهل استنتاج الحل لها كما درسنا في المحاضرة السابقة.**

5- بعد إيجاد الحل نعوض بدل كل v بالقيمة $\frac{y}{x}$ ونبسط الناتج قدر الإمكان.

<u>مثال:</u> حل المعادلة التفاضلية $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

<u>الحل:</u>

نختبر الدوال $N(x,y) = 2xydy$ و $M(x,y) = x^2 + y^2$

$$N(tx,ty) = 2txtydy = t^2 2xydy = t^2 N(x,y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

$$M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 M(x,y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

اذن الدوال متجانسة و من نفس الدرجة و عليه

نفرض $y = vx$ وباشتقاقها بالنسبة الى x نحصل على

$$dy = vdx + xdv$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\Rightarrow x^2dx + v^2x^2dx - 2v^2x^2dx - 2vx^3dv = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة والبحث عن العوامل المشتركة ينتج

$$\Rightarrow x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3dv = 0$$

بالقسمة على المقدار $(1 - v^2)x^3$ نحصل على

$$\frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0$$

بتكامل المقدار أعلاه نحصل على

$$\Rightarrow \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x(1 - v^2) = \ln c \Rightarrow x(1 - v^2) = c$$

وبإرجاع قيمة v لما يساويها وتعويضها أعلاه نجد أن

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow x - \frac{xy^2}{x^2} = c$$

بضرب المعادلة في x ينتج لدينا

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = cx$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

HOMEWORK

أولاً: حدد فيما إذا كانت الدوال التالية متجانسة أم لا؟ وإذا كانت متجانسة حدد درجة تجانسها

1) $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$

2) $f(x,y) = \tan\dfrac{2y}{x}$

3) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+3xy}{x-2y}$

5) $f(x,y) = 5y + \sqrt{x^2+y^2}$

6) $f(x,y) = y^2\tan\dfrac{x}{y}$

ثانياً: أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية

1) $xy' - y = \sqrt{x^2-y^2}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{yx}$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية اللامتجانسة (طريقة المؤثر D)

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D=\frac{d}{dx} \quad ,D^2=\frac{d^2}{dx^2} \quad ,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

وتكون المعادلة التفاضلية الخطية غير اللامتجانسة من الرتبة n بالصيغة التالية:

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x) \dots\dots\dots (1)$$

كذلك يمكن كتابة المعادلة (1) بالصيغة التالية:

$$F(D)y=f(x)$$

أي ان

$$F(D)=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)$$

مثال 1: يمكن كتابة المعادلة $\boldsymbol{y'''-y'+2y=0}$ بدلالة المؤثر و ستكون بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{(D^3-D+2)y=0}$$

الحل الخاص

يمكن إيجاد الحل الخاص من المعادلة التالية $F(D)y=f(x)$ اي ان

$$y_p=\frac{1}{F(D)}.f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة f(x)

1) (a) إذا كانت $f(x)=e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{F(D)}.e^{bx}=\frac{1}{F(b)}.e^{bx} \quad ,F(b)\neq 0$$

مثال 2:

جد الحل الخاص باستخدام طريقة طريقة المؤثر التفاضلي و من ثم جد الحل العام لها

2) $y'' + 6y' + 13y = 5e^{3x}$

الحل:

نجد الحل المتمم $\boldsymbol{y_c}$ للمعادلة المتجانسة: $y'' + 6y' + 13y = 0$

و ذلك بتحويل المعادلة المتجانسة بصيغة المؤثر التفاضلي و كتالي :

$(D^2 + 6D + 13)y = 0$

و من ثم نجد حل المعادلة المميزة:

باستخدام الدستور نجد ان:

$\boldsymbol{m^2 + 6m + 13 = 0 \Rightarrow m = -3 \pm 2i}$

ويكون الحل المتمم بالشكل

$\boldsymbol{y_c = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}$

إذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx}$$

$$y_p = \frac{5}{D^2 + 6D + 13}e^{3x} = \frac{5}{F(3)}e^{3x} = \frac{5e^{3x}}{3^2 + (6 * 3) + 13} = \frac{5e^{3x}}{40}$$

فان الحل العام هو:

$$y = y_c + \boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{e^{3x}}{8}}$$

في هذا المثال نلاحظ انه $F(b) \neq 0$

اما إذا كانت $F(b) = 0$ فالحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r}.e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

حيث $g(b) \neq 0$ و $(D-b)^r = 0$.

مثال 1: جد الحل الخاص باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 4y = e^{2x}$$

الحل:

تكتب المعادلة أعلاه بدلالة المؤثر بالشكل التالي:

$$, b{=}2(D^2 - 4)y = e^{2x}$$

لايجاد الحل الخاص نستخدم الصيغة التالية:

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx}$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2-4)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx} = \frac{1}{0}.e^{bx}$$

نلاحظ ان $F(b) = 0$

اذن يجب ان نستخدم الصيغة التالية:

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r}.e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

أي ان

$$f(D) = (D^2 - 4) = (D+2)(D-2)$$

اذن

$$f(D) = (D^2 - 4) = g(2)(D-2)^1 \Longrightarrow g(2) = 4, r = 1$$

حسب الصيغة أعلاه نجد y_p

$$y_p = \frac{xe^{2x}}{4}$$

H.M

جد الحل الخاص باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' - 16y = e^{4x} + e^{2x}$$

الاسبوع الخامس عشر

الهدف التعليمي (الهدف الخاص لكل للمحاضرة):

الهدف من دراسة المعادلات التفاضلية الخطية والتامة هو فهم كيفية تغيرالمتغيرات مع مرور الوقت او بالنسبة لمتغيراخر وتطبيقاتها في مختلف المجالات الهندسية

مدة المحاضرة: 2 ساعة نظري+ 2ساعة عملي

الأنشطة المستخدمة:

51. أنشطة تفاعلية صفية
52. أسئلة عصف ذهني
53. أنشطة جماعية (إذا تطلب الامر)
54. واجب بيتي
55. واجب الكتروني (ويفضل انشاء صفوف الكترونية Classrooms لدمج التعليم الحضوري بالتعليم الالكتروني حسب التوجهات الحديثة للتعليم والتعلم)

أساليب التقويم:

41. التغذية الراجعة الفورية من قبل التدريسي (التقويم البنائي).
42. اشراك الطلبة بالتقويم الذاتي (تصحيح اخطائهم بأنفسهم).
43. التغذية الراجعة النهائية (التقويم الختامي)، ويقصد به حل الأسئلة المعطاة كنشاط صفي في نهاية المحاضرة.
44. الاختبار القبلي

عنوان المحاضرة

(امثلة عن المعادلات التفاضلية التامة والخطية)

رابعاً : المعادلة التفاضلية الخطية Linear Differential Equation

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية هي $y' + P(x)y = Q(x)$ حيث $Q(x)$ و $P(x)$ دوال لـ x

ولحل هذه المعادلة نجد عامل التكامل $I.F$ من القاعدة التالية

$$I.F = e^{\int P(x)dx}$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية هو :

$$(I.F)\, y = \int (I.F)\, Q(x)dx + c$$

مثال (١) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $xy' = x^4 - y$

الحل : نرتب المعادلة بالصيغة :

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3$$

واضح ان المعادلة التفاضلية خطية وان

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = x^3$$

$$I.F = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

فيكون الحل العام :

$$(I.F)\, y = \int (I.F)\, Q(x)dx + c$$

$$xy = \int x.x^3dx + c = \int x^4dx + c$$

$$\therefore \quad x\,y = \frac{x^5}{5} + c$$

$$y = \frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$$

مثال (٢) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x^2+x)dy-(x^2+2xy+y)dx=0$ ثم جد الحل الخاص الذي يحقق $y(1)=3$.

الحل : نرتب المعادلة بالصيغة :

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x^2+2xy+y}{x^2+x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2x+1}{x^2+x}\,y=\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{x}{x+1}$$

واضح ان المعادلة التفاضلية خطية و

$$P(x)=-\frac{2x+1}{x^2+x}\quad,\quad Q(x)=\frac{x}{x+1}$$

$$I.F=e^{\int P(x)dx}=e^{\int -\frac{2x+1}{x^2+x}dx}$$

$$I.F=e^{-\ln(x^2+x)}=e^{\ln(x^2+x)^{-1}}=\frac{1}{(x^2+x)}$$

فيكون الحل العام هو

$$\frac{y}{(x^2+x)}=\int\frac{1}{(x^2+x)}\cdot\frac{x}{x+1}dx+c$$

$$\frac{y}{(x^2+x)}=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+c$$

$$\frac{y}{x(x+1)}=-\frac{1}{x+1}+c$$

$$\therefore\quad y=-x+(x^2+x)c$$

ولإيجاد الحل الخاص نعوض $y=3$, $x=1$ لمعرفة قيمة c

$$3=-1+(1+1)c\ \rightarrow\ c=2$$

فيكون الحل الخاص

$$y=-x+2(x^2+x)\qquad\rightarrow\qquad y=2x^2+x$$

تمارين

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ثم جد الحل الخاص اذا اعطي شرطاً ابتدائياً

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x} y = 4x - 2$

2. $(x^2 + 1)y' + xy = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

3. $y' + y \tan x = \sec x \quad ; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

4. $x^2 y' - 2xy = x^4 + 3 \quad ; \quad y(1) = 2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2} \quad ; \quad y(0) = 2$

6. $xy' + (1 + x)y = e^{-x}$

ثالثاً : المعادلة التفاضلية التامة **Exact Differential Equation**

يُقال للمعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ تامة اذا حققت الشرط التالي :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

لحل المعادلة التفاضلية التامة نفرض

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \omega(y) = c \quad \cdots (1)$$

حيث $\omega(y)$ دالة لـ y فقط (مقدار ثابت بالنسبة لـ x) و c ثابت

نشتق جزئياً بالنسبة لـ y ونساوي هذه المشتقة بـ $N(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \omega'(y) = N(x,y) \qquad \cdots (2)$$

أي انّ

$$\omega'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad \cdots (3)$$

بتكامل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ y نجد $\omega(y)$ فنعوضها في المعادلة (1) فيكون حل المعادلة التفاضلية .

ملاحظة (1): الطرف الايمن في المعادلة (3) دائماً دالة لـ y فقط .

(2): يمكن حل المعادلة التفاضلية باستعمال الفرضية

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \emptyset(x) = c$$

مثال (١) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(6x^2 + 4xy + y^2)dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)dy = 0$$

الحل : $N = 2x^2 + 2xy - 3y^2 \quad , \quad M = 6x^2 + 4xy + y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اي ان المعادلة التفاضلية تامة

$$f(x,y) = \int (6x^2 + 4xy + y^2)dx + \omega(y) = c$$

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + \omega(y) = c$$

نشتق بالنسبة لـ y $\quad 2x^2 + 2xy + \omega'(y) = N(x,y)$

$$2x^2 + 2xy + \omega'(y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\omega'(y) = -3y^2 \quad \rightarrow \quad \omega(y) = -y^3$$

وعليه فان الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = c$$

ملاحظة (3): يمكن حل المعادلة التفاضلية باستعمال الفرضية الثانية .

(4): يمكن حل المعادلة التفاضلية باعتبارها متجانسة .

مثال (٩) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(2xe^y + e^x)dx + (x^2+1)e^y dy = 0$

الحل : $N = (x^2+1)e^y \quad , \quad M = 2xe^y + e^x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^y \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اي ان المعادلة التفاضلية تامة

$$f(x,y) = \int (2xe^y + e^x)dx + \omega(y) = c$$

$$x^2e^y + e^x + \omega(y) = c$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$x^2e^y + \omega'(y) = N(x,y)$$

$$x^2e^y + \omega'(y) = (x^2+1)e^y$$

$$\omega'(y) = e^y \quad \rightarrow \quad \omega(y) = e^y$$

وعليه فان الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$x^2e^y + e^x + e^y = c$$

تمارين

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ثم جد الحل الخاص اذا اعطي شرطاً ابتدائياً

1. $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$
2. $(2xy+y^2)dx + (x^2+2xy-y)dx = 0 \quad ; \quad y(1) = 2$
3. $(y^2-1)dx + (2xy+\sin y)dy = 0 \quad ; \quad y(1) = 0$
4. $\left(\frac{y^2}{x^2+1} - 2y\right)dx + (2y\tan^{-1}x - 2x + \sinh y)dy = 0$
5. $\left(\frac{y}{x-1}\right)dx + \left(\ln(2x-2) + \frac{1}{y}\right)dy = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

الطلبـة الأعـزاء :الرجاء إضافة المعلومات المتممة التي سيقدمها المدرس أثناء المحاضرة .

لمزيد من المعلومات :

- الإطلاع على الصفحات 558-586 بالمرجع : الرياضيات للمهندسين – تأليف (A.Croft and R. Davison) النسخة الثالثة سنة التأليف عام 1998-سنة النشر 2008
- الإطلاع على الدورية Journal of Linear Algebra and its Applications

- References:
- Mathematics for Engineers : A.Croft and R. Davison, Third Edition (2008).
- Introductory Linear Algebra، An Applied First course, B. Kolman and D. Hill (2005).