وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التقني العما رة
قسم التقنيات الكهربائية

الحقيبة التدريسية لما دة

الرياضيات /1

المرحلة الأولى

الفصل الدراسي الاول

مدرس الما دة
م . سهاد جاسم خليفة

اسم المادة	لغة التدريس	السنة الدراسية	الفصل الدراسي	الفرع	الساعات الاسبوعية			الوحدات
					ن	ع	م	
الرياضـــــــــيـــات ١	العربية	الأولى	الاول	جميع الفروع	٢	-	٢	٢

المفردات

الاسبوع	تفاصيل المفردات
الأول	المصفوفات / المحددات / وخواصها
الثاني	حل المعادلات الخطية – طريقة كرامير – تطبيقات على المحددات –
الثالث	المتجهات / تحليل المتجهات / الكميات المتجهة والقياسية / جبر المتجهات / العمليات الحسابية للمتجهات في الفضاء
الرابع	وحدة المتجهات المتعامدة / مقياس المتجه / الضرب القياسي والاتجاهي / تطبيقات على المتجهات /
الخامس	الدالة / الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية / الدوال اللوغارتمية
السادس	الدالة الاسية / دوال القطع الزائد /
السابع	الغايات / غاية الدوال الجبرية والمثلثية / تطبيقات على الغايات
الثامن	التفاضل / المشتقة / مشتقة الدوال الجبرية / قاعدة السلسلة –
التاسع	الدالة الضمنية / الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا / الضمنية
العاشر	مشتقة الدوال المثلثية / مشتقة الدوال اللوغارتمية /
الحادي عشر	مشتقة الدوال الاسية / مشتقة الدوال الزائدية /
الثاني عشر	تطبيقات المشتقة / معادلة المماس والعمود /
الثالث عشر	التزايد والتناقص / النهايات العظمى والصغرى / نقاط الانقلاب / رسم الدوال
الرابع عشر	تطبيقات فيزياوية وهندسية عامة
الخامس عشر	التكامل / التكامل غير المحدد / تكامل الدوال الجبرية واللوغارتمية.

الجامعة التقنية الوسطى (MTU)

الأسبوع الاول

المصفوفات / المحددات /

خواص المحددات

المصفوفات **Matrixes**

المصفوفة : المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الاعداد مرتبة على شكل مستطيل محاطة باقواس، وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على انها تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية والمعقدة، يرمز للمصفوفة بالرموز .....A,B,C, ومدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij}.

$$A=[a_{ij}]=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots \dots a_{2n} \\ \\ a_{m1} \dots \dots \dots \dots a_{mn} \end{vmatrix}_{m*n}$$

المصفوفة — مدخلات المصفوفة

حيث :m = صف، n= عمود

الصف Row i=1,2,3,……m

العمود Column j=1,2,3,…….n

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة A من السعة (m*n) واذا كان (m=n) (اي ان عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة)

Example (1):

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

انواع المصفوفات

1. **المصفوفة القطرية**(Diagonal Matrix)**:** تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابته Constant(C) حيث ان aij=c لكل i=j

Example(2):

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4*4}$$

2. **المصفوفة الصفرية :**Null Matrix , Zero Matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها اصفار.

Example(3):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

3. مصفوفة الوحدة : Identity Matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار، ونرمز لها بالرمز I.

Example (4):

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \quad ; \quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

4. المصفوفة المثلثية: Triangular Matrix

i. المصفوفة المثلثية العليا: وهي المصفوفة التي تكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الرئيسي تكون اصفار.

Example (5):

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3*3} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

ii. المصفوفة المثلثية السفلى: وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي اصفار.

Example(6):

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 6\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{2*2}$$

5. مدور المصفوفة : Transpose of Matrix

وهي تغير اعمدة المصفوفة بدل صفوفها او تغيير الصفوف بدل الاعمدة

Example (7):

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}_{3*2} \quad ; \quad A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{2*3}$$

6. المصفوفة المنفردة :

هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها يساوي صفر.

7. المصفوفة غير المفردة:

هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها لا تساوي صفر $(\neq 0)$

Example (8):

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2*2}$$

قيمة المحدد $|A|=2\times 5-1\times 4=10-4$

$\therefore |A|=6$

ان هذه المصفوفة غير منفردة لان قيمة محددها (6) اي لا يساوي صفر .

Example(9):

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}_{2*2}$$

قيمة المحدد $|B| = 3 \times 4 - 2 \times 4$

$= 12 - 12 = 0$

المصفوفة منفردة لان قيمة محددها يساوي صفر .

العمليات الجبرية على المصفوفات :

1. الجمع والطرح

If A=$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$A \pm B = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 & a_4 \pm b_4 \end{bmatrix}$

Example (1):

Let A=$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Find(1) A+B (2)A-B

(1) A+B= $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

(2) A-B=$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ملاحظة: عند ضرب مصفوفة في ثابت (Constant) نضرب كل عناصر المصفوفة في ذلك الثابت .

Example (2):

A=$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, C= 2

CA=$2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

ضرب مصفوفتين: لكي نضرب مصفوفتين يجب ان يكون عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية .

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

1. $2A+B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 4\\ 7 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$

2. $A\times B=\begin{bmatrix}1*3+1*3+1*3 & 1*1+1*1+1*1 & 1*2+1*2+1*2\\ 2*3+2*3+2*3 & 2*1+2*1+2*1 & 2*2+2*2+2*2\\ 0*3+0*3+0*3 & 0*1+0*1+0*1 & 0*2+0*2+0*2\end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix}3+3+3 & 1+1+1 & 2+2+2\\ 6+6+6 & 2+2+2 & 4+4+4\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}9 & 3 & 6\\ 18 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Example (4):

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\ Find\ 1.A\times B \qquad 2.B\times A$$

1. $A\times B=\begin{bmatrix}2*3+5*0+3*1 & 2*2+5*2+3*2 & 2*3+5*3+3*3\\ 4*3+2*0+1*1 & 4*2+2*2+1*2 & 4*3+2*3+1*3\end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix}9 & 20 & 30\\ 13 & 14 & 21\end{bmatrix}$$

2. $B\times A=$ لا يمكن ايجاد B×A لان اعمدة B لا يساوي صفوفA

المحددات Determinants

المحدد : هو عبارة عن مصفوفة مربعة (عدد الصفوف = عدد الاعمدة) محاطة بقطعتي مستقيمين شاقوليين | | ويرمز له $|A|$ او detA او D.

ايجاد قيمة المحدد الثنائي

Let A= $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}$

A=(3*6)-(4*2)

القطر الايسر

A= 18-8

القطر الايمن

A=10

مثال : جد قيمة X اذا كان $D=\begin{vmatrix} X & 4 \\ 1 & X \end{vmatrix} = 0$

$X^2-4=0$

$X^2=4$

$X=\mp 2$

ايجاد قيمة المحدد الثلاثي :

1. الطريقة الاولى : الطريقة الخاصة او طريقة التدوير (Rotate)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3*3}$$

$$\mathbf{A=}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

a. نكرر كتابة العمودين الاول والثاني بالترتيب الى يمين المحدد .

b. ايجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الاقطار الموجبة والسالبة كما هو مبين في الاسهم (اعلاه) وكما يلي:

$A= (a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})-(a_{13})(a_{22})(a_{31})-(a_{11})(a_{23})(a_{32})-(a_{12})(a_{21})(a_{33})$

2. الطريقة الثانية (طريقة التجزئة) : في هذه الطريقة نعتبر اشارة العمود الاول $\oplus$ والعمود الثاني $\ominus$ والثالث $\oplus$ وهكذا ثم نقوم باخراج المحدد مع اشارته بعد الغاء العمود فينتج محدد ثنائي .

مثال : جد قيمة المحدد التالي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل :

1. باضافة عمودين (التدوير)

2. $$A=\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{matrix}$$

$$|A| = (1\times 1\times 1)+(1\times 3\times 3)+(1\times 2\times 1) - (1\times 2\times 1)(1\times 3\times 1)-(1\times 1\times 3)$$

$$|A| = 1+9+2-2-3-3$$

$$|A| = 12-8$$

$$|A| = 4$$

3. بطريقة التجزئة :

$$|A| = +(1)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$|A| = +1(1\times 1-3\times 1)-1(2\times 1-3\times 3)+1(2\times 1-1\times 3)$$

$$|A| = -2+7-1$$

$$|A| = 4$$

الأسبوع الثاني

حل المعادلات الخطية /

طريقة كرامر /

تطبيقات على المحددات

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات(طريقة كرامر)

Cramers Rule

1.نرتب المعادلات بالشكل:- $X + Y + Z =$

الحد المطلق

2.نقوم بايجاد محد د المعادلات D لكونه الدليل لأيجاد قيم (X, Y, Z)

3.نجد المحد د D_1 بحذف معاملات X من المحد د ووضع الحد المطلق بدلها

4. نجد المحد د D_2 بحذف معاملات Y من المحد د ووضع الحد المطلق بدلها. وهكذا بالنسبة D_3

5.نجد قيم (X , Y , Z) كالأتي :-

$$X = \frac{D_1}{D} \ , \qquad Y = \frac{D_2}{D} \qquad , Z = \frac{D_3}{D}$$

مثال(1) جد قيم (X , Y) من المعادلات التالية بطريقة كرامر:-

$$3X - Y = 2$$

$$X + 2Y = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = (3 * 2) - (-1 * 1)$$

$$D = 6 + 1 = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = (2 * 2) - (-1 * 4)$$

$$D_1 = 4 + 4 = 8$$

$$2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = (3 * 4) - (2 * 1)$$

$$D_2 = 12 - 2 = 10$$

$$X = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{7}$$

$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{7}$$

مثال(2) جد قيم (X, Y, Z) من المعادلات التالية بطريقة كرامر:-

$$X + Y + Z = 1$$

$$2X + Y + 3Z = 2$$

$$3X + Y + Z = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$D = 2 + 9 + 1 - 2 - 3 - 3$$

$$D = 12 - 8 = 4$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$D_1 = 2 + 6 + 1 - 2 - 3 - 2$$

$$D_1 = 2 + 6 + 1 - 2 - 3 - 2$$

$$D_1 = 9 - 7 = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$D_2 = 4 + 9 + 2 - 2 - 6 - 6$$

$$D_2 = 15 - 14 = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$D_3 = 2 + 6 + 2 - 4 - 2 - 3$$

$$D_3 = 10 - 9 = 1$$

$$X = \frac{D_1}{D}$$

$$X = \frac{2}{4}$$

$$X = \frac{1}{2}$$

$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{4}$$

$$Z = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{4}$$

مثال(3) جد قيم التيارات (I_1 , I_2, I_3)من المعادلات التالية بطريقة المحددات

$$3I_1 - I_3 = 10$$

$$2I_2 - 3I_3 = 8$$

$$I_1 - 2I_3 + I_2 = 6$$

$$3I_1 + 0 - I_3 = 10$$

$$0 + 2I_2 - 3I_3 = 8$$

$$I_1 + I_2 - 2I_3 = 6$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$D = 0 + 0 - 12 - 0 + 9 + 2$$

$$D = -12 + 11$$

$$D = -1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 0 \\ 8 & 2 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

$$D_1 = -8 + 0 - 40 + 0 + 30 + 12$$

$$D_1 = -48 + 42$$

$$D_1 = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 10 \\ 0 & 8 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

$$D_2 = 0 - 30 - 40 + 0 + 54 + 8$$

$$D_2 = 36 - 44$$

$$D_2 = -16$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$D_3 = 0 + 0 + 36 - 0 - 24 - 20$$

$$D_3 = 36 - 48$$

$$D_3 = -8$$

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-16}{-1} = 16$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{-1} = 8$$

مثال(4) جد قيم (X, Y, Z) من المعادلات التالية بطريقة كرامر:-

$$X - Y = 1$$

$$X - Z = 3$$

$$Y + Z = 8$$

$$X - Y + 0 = 1$$

$$X + 0 - Z = 3$$

$$0 + Y + Z = 8$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$D = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 - 0$$

$$D = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{matrix}$$

$$D_1 = 0 + 8 + 0 + 3 + 1 - 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{matrix}$$

$$D_2 = 0 + 0 + 3 - 1 + 8 - 0$$

$$D_2 = 10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$D_3 = 1 + 0 + 0 + 8 - 3 - 0$$

$$D_3 = 6$$

$$X = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{2} = 6$$

$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{2} = 5$$

$$Z = \frac{D_3}{D} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال(5) جد قيم (X, Y, Z) من المعادلات التالية بطريقة كرامر:-

$$4X + Y + Z = 5$$

$$3X + Y + 4Z = 10$$

$$X + Y + Z = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$D = 3 + 4 + 4 - 3 - 16 - 1$$

$$D = -9$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$D_1 = 10 + 8 + 5 - 10 - 20 - 2$$

$$D_1 = 23 - 32 = -9$$

$$D2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$D_2 = 6 + 20 + 40 - 15 - 32 - 10$$

$$D_2 = 66 - 57 = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$D_3 = 15 + 10 + 8 - 6 - 40 - 5$$

$$D_3 = 33 - 51$$

$$D_3 = -18$$

$$X = \frac{D_1}{D} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$Z = \frac{3}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

تمارين تطبيقية : جد قيم (X , Y, Z) من المعادلات التالية بطريقة كرامر

س 1 /

$$\boldsymbol{x + y + z = 4}$$

$$\boldsymbol{2x + y + z = 5}$$

$$\boldsymbol{x + 2y + z = 5}$$

س 2 /

$$\boldsymbol{3x + y + z = 3}$$

$$\boldsymbol{2x + 2y + 5z = -1}$$

$$\boldsymbol{x - 3y - 4z = 2}$$

الأسبوع الثالث

المتجهات / تحليل المتجهات /

الكميات المتجهة والقياسية /

جبر المتجهات

المتجهات Vectors

الكميات العددية :هي الكميات التي تتحدد بذكر قيمتها فقط

الكميات الاتجاهية:هي الكميات التي تتحدد بذكر قيمتها و اتجاهها

اذا كان لدينا متجه ثلاثي في الفضاء فان

i هو متجه الوحدة باتجاه محور X

j هو متجه الوحدة باتجاه محور Y

kهو متجه الوحدة باتجاه محور Z

مركبات المتجه:

اي متجه مثل$\vec{A}$ يمكن تمثيله بنقطة ابتدائية عند نقطة الاصل بنظام احداثي عمودي ,اذا فرضنا ان (A_1, A_2, A_3) هي الاحداثيات العمودية للنقطة النهائية للمتجه $\vec{A}$ عندئذ المتجهات $(A_{1i}, \mathrm{A_{2j}}, \mathrm{A_{3j}})$

تسمى مركبات للمتجه$\vec{A}$ في الاتجهات (X, Y, Z) على الترتيب بحيث يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_{1i} + \mathrm{A_{2j}} + \mathrm{A_{3k}}$$

مقدار المتجه $\vec{A}$ *هو* $|A|$

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

ولمتجه الموضع او المتجه القطري r من نقطة الاصل الى النقطة $(\mathrm{x, y, z})$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ملاحظة: نصطلح على وحدة المتجه العمودي بالرمز $\vec{U}$وينشأ من قسمة المتجه $\vec{A}$على طوله $|A|$ حيث:

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

جمع وطرح المتجهات

يتم جمع وطرح المتجهات من خلال المركبات المتشابهة لتلك المتجهات .

ملاحظة: عند ضرب متجه في ثابت نضرب كل مركبات المتجه بذلك الثابت

$Example$

ليكن $\vec{A}, \vec{B}$ متجهين هما :

$\vec{A} = 3i + 3j + k$

$\vec{A} = i + j + k$

جد :

$1)\vec{A} + \vec{B}$

$2)\vec{A} - \vec{B}$

$3)2\vec{A} + \vec{B}$

$4)|A|$

$5)\vec{U}(A)$

الحل:

$1)\vec{A} + \vec{B} = 4i + 4j + 4k$

$2)\vec{A} - \vec{B} = 2i + 2j$

$3)2\vec{A} + \vec{B} = 7i + 7j + 3k$

$4)|A| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (1)^2}$

$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\mathbf{19}}$

$5)\vec{U}(A) = \frac{\vec{A}}{|A|}$

$$\vec{U}(A) = \frac{3i + 3j + 1k}{\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{\mathbf{19}}}i + \frac{3}{\sqrt{\mathbf{19}}}j + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{19}}}k$$

الأسبوع الرابع

وحدة المتجهات المتعامدة /

الضرب القياسي والاتجاهي /

تطبيقات على المتجهات

الضرب النقطي او العددي للمتجهات

الضرب النقطي او العددي للمتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ يشار اليه بالمقدار $(\vec{A}.\vec{B})$ ويقرأ($\vec{A}$دوت$\vec{B}$) ويكتب حسب القانون التالي :

$$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|.\cos\theta$$

سنستخدم هذا القانون لأيجاد الزاوية θ المحصورة بين المتجهين مع ملاحظة ان($\vec{A}.\vec{B}$)مقدار عددي وليس متجها

قوانين حول الضرب العددي

1.قانون التبديل $\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}\,.\,\vec{A}$

2.قانون التوزيع $\overrightarrow{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

3. $m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(m\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{B}).m$

حيث m مقدار عدد

4.اذاكان $\vec{A}.\vec{B} = 0$ والمتجهين $\longrightarrow$ و $\longrightarrow$ ليسا متجهين صفريين فأن المتجهين $\vec{B}$و $\longrightarrow$ يكونان متعامدين

لاحظ ان

$\sin 90 = 1$

$\sin 0 = 0$

$\cos 90 = 0$

$\cos 0 = 1$

الضرب الأتجاهي للمتجهات

ان ضرب المتجه$\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$ اتجاهيا هو متجه $\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$ ويقرأ ($\vec{A}$ كروس$\vec{B}$)

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \sin\theta \, U$$

حيث U وحدة متجه تشير الى اتجاه $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$,اذا كان المتجه $\vec{\mathrm{A}}$ موازيا للمتجه$\vec{\mathrm{B}}$ او اذا كان $\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{B}}$ فأن $\sin\theta = 0$ عندئذ $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = 0$

قوانين الضرب الأتجاهي:

1.قانون التبديل $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2. قانون التوزيع $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

3. $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = (\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}})m$

حيث m مقدار عددي

4.اذا كان $\vec{A} = \mathrm{A_{1i}} + \mathrm{A_{2j}} + \mathrm{A_{3k}}$

$$\vec{B} = \vec{B}_{1j} + \vec{B}_{2j} + \vec{B}_{3k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ & \vec{A} & \text{معاملات} \\ & \vec{B} & \text{معاملات} \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \qquad \vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ & \vec{B} & \text{معاملات} \\ & \vec{A} & \text{معاملات} \end{vmatrix}$$

5.$|\vec{A} \times \vec{B}|$ عبارة عن مساحة متوازي اضلاع ضلعاه $\vec{A}$و $\vec{B}$

أمثلة محلولة :

مثال(1) لديك المتجهين $\vec{A} = i + j + k\,, \quad \vec{B} = 2i - j - k$

$(1)\vec{A} + \vec{B}\ (2)\theta(\vec{A}, \vec{B})(3)\vec{A} \times \vec{B}\ (4)\vec{U}(\vec{A} \times \vec{B})$

$1)\vec{A} + \vec{B} = 3i + 0j + 0k\ = 3i$

$(2)\theta(\vec{A}, \vec{B})$

$|A| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|B| = \sqrt{(2^2) + (-1^2) + (-1^2)} = \sqrt{6}$

$\vec{A}.\vec{B} = 2 - 1 - 1 = 0$

$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|.\cos\theta$

$0 = \sqrt{3} * \sqrt{6}COS\theta$

$\cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{3} * \sqrt{6}}\ \ , \cos\theta = 0$

$\theta = \cos^{-1} 0 = 90$

$$(3)\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$\vec{A} \times \vec{B} = -K + 2j - i + j + i - 2k$

$\vec{A} \times \vec{B} = 3j - 3k$

$(4)\vec{U}(\vec{A} \times \vec{B}) = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(3^2) + (-3^2)} = \sqrt{18}$

$$\vec{\mathrm{U}}(\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}) = \frac{3j - 3k}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{18}} j - \frac{3}{\sqrt{18}} k$$

مثال(2)اوجد مساحة متوازي الأضلاع ومساحة المثلث وقيمة متجه الوحدة العمودي $\vec{\mathrm{U}}(\vec{A}, \vec{B})$

$\vec{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i} + \mathrm{j} - 2\mathrm{k}\ , \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k}$ للمتجهين

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = 6k - 2j + 4i - 8j + 6i - K$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 10i - 10j + 5k$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{(10^2) + (-10^2) + (5^2)} = \sqrt{225} = 15$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع =*15* وحدة مربعة

مساحة المثلث =$\frac{15}{2}$= 7.5وحدة مربعة

$$\vec{\mathrm{U}}(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}) = \frac{10i - 10j + 5k}{15}$$

$$\vec{\mathrm{U}}(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}) = \frac{10i}{15} - \frac{10j}{15} + \frac{5k}{15}$$

$$\vec{\mathrm{U}}(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}) = \frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

مثال(3)احسب قيمة x عندما يكون المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ متعامدين حيث

$$\vec{A} = 2i + 3j - xk\ , \vec{B} = i + 2j + 2xk$$

المتجهين متعامدين

$(\therefore \vec{A}.\vec{B} = 0$

$2 + 6 - 2X^2 = 0$

$-2X^2 = -8$

$x^2 = \frac{8}{2} = 4$

$x = \pm 2$

مثال(4) لديك المتجهين $\vec{A} = 3i + j - 2k \ , \vec{B} = -i + 3j + 4k$

برهن ان : (1) $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ (2) $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\vec{A} \times \vec{B} = 9k + 2j + 4i - 12j + 6i + K$

$\vec{A} \times \vec{B} = 10i - 10j + 10k$

$\overrightarrow{(A \times B)}.\vec{A} = 30 - 10 - 2 = 0$

$\overrightarrow{(A \times B)}.\vec{B} = -10 - 30 + 40 = 0$

$\therefore \overrightarrow{(A \times B)}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$

مثال(5) اثبت ان المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ متوازيين $\vec{A} = 3i + 9j + 6k \ , \vec{B} = i + 3j + 2k$

$\vec{A}.\vec{B} = 3 + 27 + 12 = 42$

$|\vec{A}| = \sqrt{(3^2) + (9^2) + (6^2)} = \sqrt{126}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(1^2) + (3^2) + (2^2)} = \sqrt{14}$

$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|.\cos\theta$

$42 = \sqrt{126} * \sqrt{14}\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{42}{\sqrt{126} * \sqrt{14}} = \frac{42}{42} = 1$

$\theta = \cos^{-1} 1 = 0$

∴ المتجهين متوازيين

<u>تمارين تطبيقية:-</u>

(1)لديك المتجهين $\vec{A} = 3i - 2j + k$, $\vec{B} = i - k$

جد:- 1)$\vec{A} + \vec{B}$ (2) $\theta\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$ (3) $\vec{A} \times \vec{B}$ (4)$\vec{U}\ (\vec{A}, \vec{B})$

(2)جد مساحة متوازي الأضلاع ومساحة المثلث وقيمة متجه الوحدة$\vec{U}$ للمتجهين

$\vec{A} = 3i + j - 2k$, $\vec{B} = -i + 3j + 4k$

الأسبوع الخامس –

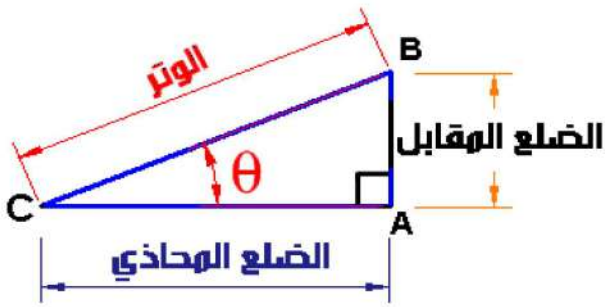
الاسبوع السابع

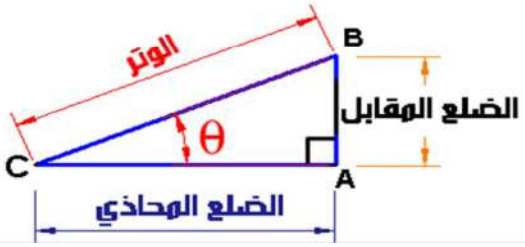
الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية / الدوال اللوغارتمية / الدالة الاسية

الدوال المثلثية واللوغارتمية والاسية

اولاً: الدوال المثلثية

$$\sin(A) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad , \quad cos(A) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad , tan(A) = \frac{sin(A)}{cos(A)} = \frac{\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

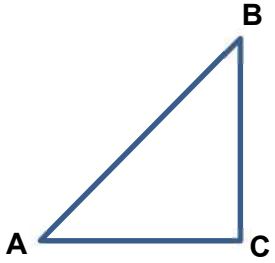




$$\sin\theta = \frac{1}{csc\theta} \quad , \tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \quad , cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$$

من خلال تطبيق نظرية فيثاغورس يمكن تحديد العلاقات التالية

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



$$1 = \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} \quad ------(1)$$

$$\frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta}$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \quad ---(2)$$

$$\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \quad ----(3)$$

ثانيا: الاسس

- $A^m . A^n = A^{m+n}$
- $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$
- $(A^m)^n = A^{m.n}$

حل المعادلات الاسية

المعادلات الأسية:
إن كان المطلوب معرفة قيمة الأس وكان الأساس متساوي في الطرفين فإن الأسس متساوية كذلك

مثال 1 : أوجد قيمة x في المعادلة

$$2^x = 2^3$$

الحل : بما أن الأساسان متساويان نساوي الأسس ببعضها في الطرفين وعليه يكون
(3 =x)

مثال 2 : أوجد قيمة x في المعادلة

$$5^{x-5} = 125$$

الحل : نساوي الأساسان

$$5^3 = 125$$

وبالتالي

$$5^{x-5} = 5^3$$

الأساسان متساويان وبالتالي نساوي الأسس في الطرفين فيصبح

$$x - 5 = 3 \rightarrow x = 5 + 3 = 8$$

مثال 3: أوجد قيمة x في المعادلة

$$2^{x-5} + 5 = 13$$

الحل : ننقل ال5 للجهة الأخرى بإشارة سالبة
وعليه :

$$2^{x-5} = 8$$

نساوي الأساسان

$$2^3 = 8$$

$2^{x-5} = 2^3$ **وبما أن الأساسان متساويان نساوي الأسس في الطرفين**

$$x - 5 = 3 \rightarrow x = 8$$

H.W./ Find

$27^{\frac{1}{3}}, 32^{\frac{1}{5}}, 32^{-\frac{2}{5}}$

ثالثا: اللوغارتيمات

انواعها

1) **الاعتيادية**: هي اللوغارتيمات التي يكون اساسها اي رقم فاذا كان اساسها عشرة تسمى باللوغارتيمات العشرية

2) **اللوغاريتمات الطبيعية**:- وهي اللوغاريتمات التي يكون اساسها الرقم **2.718**

ملاحظة: لايوجد لوغارتم للعدد السالب والصفر

$$log_{10}^{0} = 0$$
$$log_{10}^{10} = log_{10}^{10^1} = 1$$
$$log_{10}^{100} = log_{10}^{10^2} = 2$$
$$log_{10}^{1000} = log_{10}^{10^3} = 3$$
$$log_{10}^{0.1} = log_{10}^{10^{-1}} = -1$$
$$log_{10}0.01 = log_{10}^{10^{-2}} = -2$$

قوانين اللوغاريتمات

1) $\log xy = logx + logy$

2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = logx - logy$

3) $logx^4 = 4logx$

4) $log\sqrt[u]{x^n} = logx^{\frac{n}{u}} = \frac{n}{u}logx$

Ex. 1/ if log2=0.301
log3=0.4771

Find log9, log8, log6, log18

Log9 = $\log 3^2 = 2log3 = 2x0.4771$

Ex. 2/ prove that log64-3log2-2log4=log1/2

Solu:

$$log2^6 - 3log2 - 2log2^2$$
$$= 6log2 - 3log2 - 4log2$$
$$= -log2 = log_2^{-1} = \log\frac{1}{2}$$

Mohammed M Hanon

Ex. 3/ Find x from logx+2logx/2=log2

Logx+log$(x/2)^2$=log2

$$\log\left(x.\frac{x^2}{4}\right) = log2$$

$$log\frac{x^3}{4} = log2$$

$$\frac{x^3}{4} = 2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2$$

Ex. 4/ $\log_9 27$ جد قيمة

Assume $\log_9 27 = a$

$27=9^a$ *$3^3=3^{2a}$*

3=2a *a=3/2*

Ex. 5/ $\log_3 2x + 1 = 2$ جد قيمة x

$2x+1=3^2$

2x=9-1 → x=4

Ex. 6/ حل المعادلة التالية

$\text{Log}_2 x^2 + 5x + 2 = 4$

$X^2+5x+2=2^4$

$X^2+5x+2=16$

$X^2+5x-14=0$

(x-2)(x+7)=0

X=2 , x=-7

Ex.7/ $\log_c \frac{1}{27} = -\frac{3}{4}$

$1/27=c^{-3/4}$

$3^{-3}=c^{-3/4}$ $\Rightarrow (3^{-3})^{-\frac{4}{3}} = C^{\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}}$

$3^4=C$ $\Rightarrow C = 81$

H.W./ جد قيمة المقدار التالي

Log32-3log2-4log4

Mohammed M Hanon

اللوغاريتم الطبيعي e=2.718

ملاحظة: ان اللوغارتم هو معكوس اللوغارتم الطبيعي e

$X=e^{y}$

$y = \log_e x = lnx$

$lnx = \frac{logx}{loge} \quad if \ m = loge = 0.43429$

$\frac{1}{m} = \frac{1}{0.434} = 2.3$

$lnx=2.3logx$

Muammel M Hanon

الأسبوع الثامن والتاسع

التفاضل / المشتقة /

مشتقة الدوال الجبرية /

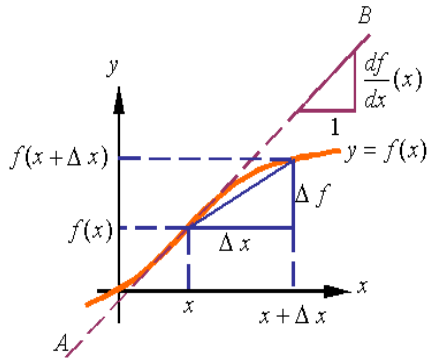
قاعدة السلسلة /

مشتقة الدوال الضمنية

ايجاد المشتقة بطريقة التعريف

If $y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



مثال (1) : جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $Y = X^2$

$$y = f(x) = X^2$$

$$f(x + \Delta x) = (X + \Delta X)^2$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

مثال (2) : جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sqrt{x}$ بطريقة التعريف

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\ (x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sqrt{x + \Delta x}\ -\ \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sqrt{x + \Delta x}\ -\ \sqrt{x}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$lim_{\Delta x \to 0} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x\ (\sqrt{\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{x}})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قواعد الاشتقاق *Rule of differentiation*

ان عملية ايجاد المشتقة تدعى الاشتقاق وان الدالة التي لها مشتقة عند x تدعى بالدالة القابلة للاشتقاق.

اذا كانت $y = f(x)$ فأننا نرمز لمشتقة y بالنسبة لـ x كما يلي :-

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ or } \frac{dy}{dx} \quad or \quad y^{-}$$

اولا :- مشتقة الثابت = صفر

$y = f(x) = \text{constant}$ (ثابت)

$\frac{dy}{dx} = 0$

$Ex.\ y = 7 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

ثانيا :- مشتقة مقدار x مرفوع الى اس n

$y = x^n$

$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Ex.

$y = x^9$

$\frac{dy}{dx} = 9x^8$

ملاحظة :- اذا كان المقدار مضروب في ثابت مثل a

$y = ax^n$

$\frac{dy}{dx} = an\, x^{n-1}$

Ex.

$y = 3x^4$

$\frac{dy}{dx} = 12x^3$

ثالثا:مشتقة مجموعة دوال = مجموع مشتقات الدوال

$y = f(x) \pm g(x)$

$y^- = f^-(x) \pm g^-(x)$

$Ex\ (1)$

$y = 3x^5 + 7x^2 - 5x + 11$

$y^- = 15x^4 + 14x - 5.$

$Ex(2)\ \ y = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 13$

$y^- = x^2 - 18x\ .$

رابعا :- مشتقة قوس مرفوع الى أس = الاس (القوس)$^{\text{الأس-1}}$ $*$ مشتقة داخل القوس

$y = [f(x)]^n$

$y^- = n\ [f(x)]^{n-1} * f^-(x)$

$Ex\ (1)$

$y = (3x^7 + 2x)^{10}$

$f^- = 10(3x^7 + 2x)^9 * (21x^6 + 2)$

$Ex\ (2\ )$

$y = \sqrt{x^2 + 1}$

$y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

$f^- = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} . 2x$

خامسا : مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاولى * مشتقة الثانية + الثانية * مشتقة الاولى

Ex(1)

$y = (x^2 + 1)(x + 3)$

$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1).(1) + (x + 3).(2x)$

( )

$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 + 2x^2 + 6x$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x + 1$

سادسا : مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{(\text{المقام} * \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} * \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$y^- = \frac{g(x).f^-(x) - f(x).g^-(x)}{[g(x)]^2}$

$Ex(1)\ y = \frac{6x + 3}{x + 2}$

$y = \frac{(x + 2).(6) - (6x + 3).(1)}{(x + 2)^2}$

$y^- = \frac{6x+12-6x-3}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$

سابعا :- مشتقة الدالة الضمنية Implicit Function

في بعض الاحيان تصادفنا علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين او اكثر حيث يصعب التعبير عن احد المتغيرات بدلالة الاخر مباشرة لذا نلجأ الى الاشتقاق الضمني وفي هذا الاشتقاق نضرب كل مشتقة لـ y في y^-

مثال (1) جد y^- للدالة $x^2 + y^2 = 25$

$$2x + 2y\,y^- = 0$$

$$2\,y^- = -\frac{2x}{2y} \qquad \therefore y^- = \frac{-x}{y}$$

مثال (2) جد y^- للدالة $y^2 + xy + x^2 = 7$

$$2yy^- + (x).y^- + (y).(1) + 2x = 0$$

$$y^-(2y + x) + y + 2x = 0$$

$$y^- = \frac{-y - 2x}{(2y + x)}$$

ثامنا : مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسة) The chain rule

لتكن $y = f(u)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل (u)

و $u = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل(x)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال اذا كانت $y = u^2 + 5u - 1\ ,\ 3u = x +$ جد y^-

الحل:- هناك طريقتان لحل هذا المثال

الطريقة الاولى :- نوجد y بدلالة x وذلك بالتعويض عن u فنحصل على :-

$$y = (x + 3)^2 + 5(x + 3) - 1$$

$$y = x^2 + 6x + 9 + 5x + 15 - 1$$

$$y = x^2 + 11x - 23$$

ثم نجد المشتقة مباشرة $\frac{dy}{dx} = 2x + 11$

الطريقة الثانية :- نستعمل قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{du} = 2u + 5 \ , \ \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5).(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 6 + 5$$

$$y = x^2 + 11x - 23$$

تمارين

جد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية

1. $x^2 y + 3y - 4 = 0$

2. $x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}$

3. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 13$

4. $y = u^2 - 2u^{-2} \ , \quad u = x^2 + 2$

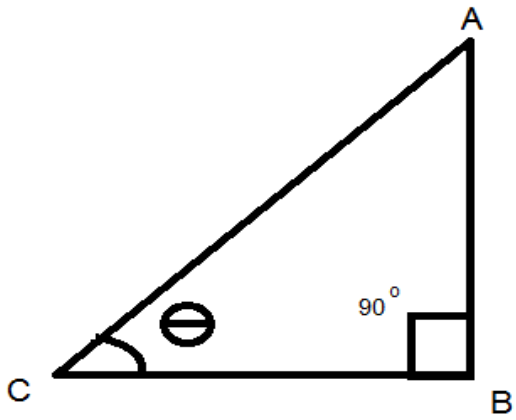
5. $y = 2u^3 - 5 \ , u = x^{-2} + x^2$

6. $y = u + \frac{1}{u} \quad , u = (3x + 1)^2$

7. $y = (x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})^5$

مراجعة في المثلثات

في المثلث ثلاثة اضلاع وثلاثة زوايا ومجموع زوايا المثلث يساوي 180^o . في المثلث القائم الزوايا احدى الزوايا تساوي 90^o بينما مجموع الزاويتين الاخريتين90^o



انظر الى المثلث ABCالقائم الزاوية في B

1- الضلع ABيقابل الزاوية θويسمى المقابل
2- الضلع CBيجاور الزاوية θويسمى المجا
3- الضلع CA يسمى الوتر

النسب المثلثية

1- جا θ=====> جيب الزاويةsinθ
2- حتا θ=====> جيب تمام الزاوية cosθ
3- ظا θ=====> ظل الزاويةtanθ
4- ظتا θ=====> ظل تمام الزاويةcotθ
5- قا θ=====> قاطع الزاوية secθ
6- قتا θ=====> قاطع تمام الزاوية cscθ

1- حاθ $= \frac{AB}{CA} \leftarrow \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} =$ sinθ

2- حتاθ $= \frac{CB}{CA} \leftarrow \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} =$ cosθ

3- ظا θ$= \frac{AB}{CB} \leftarrow \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} =$ tanθ

4- ظتا θ$= \frac{CB}{AB} \leftarrow \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} =$ cotθ

5- قا θ$= \frac{CA}{CB} \leftarrow \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} =$ secθ

6- قتا θ $= \frac{CA}{AB} \leftarrow \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} =$ cscθ

العلاقة بين النسب المثلثية

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

قوانين مهمة في النسب المثلثية

1- $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

2- $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

3- $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

4- $cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\,\theta)$

5- $sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\,\theta)$

الأسبوع العاشر

والحادي عشر

مشتقة الدوال المثلثية /

مشتقة الدوال اللوغارتيمية /

مشتقة الدوال الاسية

مشتقة الدوال المثلثية

اذا كانت $\theta = f(x)$

1- $y = sin\theta \quad \frac{dy}{dx} = cos\theta \frac{d\theta}{dx}$

2- $y = cos\theta \quad \frac{dy}{dx} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dx}$

3- $y = \tan\theta \quad \frac{dy}{dx} = sec^2\theta \ \frac{d\theta}{dx}$

4- $y = \cot\theta \quad \frac{dy}{dx} = -\ csc^2\theta \frac{d\theta}{dx}$

5- $y = sec\theta \quad \frac{dy}{dx} = sec\theta \ \tan\theta \ \frac{d\theta}{dx}$

6- $y = csc\theta \quad \frac{dy}{dx} = -csc\theta \ cot\theta \ \frac{d\theta}{dx}$

ملاحظة

نطبق نفس قواعد الاشتقاق على مشتقة الدوال المثلثية وغيرها مع ملاحظة ان مشتقة اي دالة مثلثية = مشتقة الدالة المثلثية * مشتقة الزاوية .

Find $\frac{dy}{dx} \ for$

(1)$y = sin\ 3x$

$\frac{dy}{dx} = cos\ 3x\ .(3) = 3\ cos3\ 3x$

(2) $y = tan^5 2x$

$\frac{dy}{dx}$ = (5)$tan^4 2x.sec^2 2x.2$

$\frac{dy}{dx} = 10\ tan^4 2x\ .sec^2 2x$

(3)$y = sin\ 3x\ .cos\ 3x$

$\frac{dy}{dx} = \ sin\ 3x\ .(-sin\ 3x)\ (3)\ + cos\ 3x\ .(cos\ \ 3x\ )\ .(3)$

$\frac{dy}{dx}$ = $-3\ sin^2 3x + \ 3\ cos^2 3x$

(4)$if\ \ y = \tan x$ prove that $\frac{dy}{dx}$ =sec² x

$y\ = tanx$

$y = \ \frac{sinx}{cosx}$

$\frac{dy}{dx}$ = $\frac{\cos x\ .cos\ x - \sin x\ (-sinx)}{cos^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = \ \frac{cos^2 x + \ sin^2 x}{cos^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 x}{cos^2 x} + \ \frac{sin^2 x}{cos^2 x}$

$\frac{dy}{dx}$ = 1+ tan²x =sec²x

(5) if $y = secx\ \ prove\ that\ \ \frac{dy}{dx} = secx\ tanx$

$y = secx\ = \ \frac{1}{cos\ x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)\ .(0) - \ (1).(-sinx)}{cos^2 x} = \ \frac{sinx}{cos^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = \ \frac{1}{\cos x} . \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{dy}{dx} = secx\ .\tan x\ .$

مشتقة الدالة اللوغارتمية

خواص اللواغريتم الطبيعي :

يسمىln باللوغاريتم الطبيعي

1. $ln\ (xy)\ = \ ln\ x\ + \ ln\ y$

2. $\ln \frac{x}{y} = \ \ln x - \ \ln y$

3. $Lnx^n\ \ = \ n\ ln\ x$

4. $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{lnx}{n}$

5. $ln\frac{1}{x} = -ln\,x$

مشتقة الوغاريتم الطبيعي

$if\ y = ln\,u\,,\ u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

1. $y = ln\,x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\ .\ 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$y = lncos\,x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}.-\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

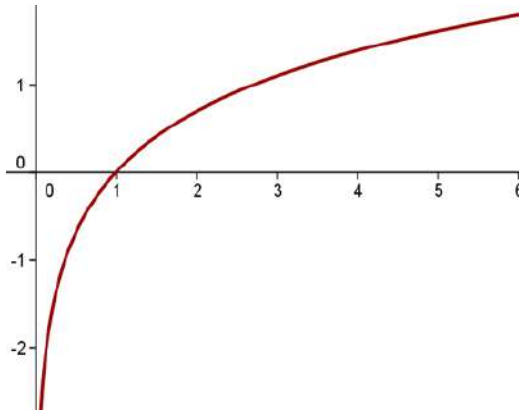
$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$y = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\,[\,ln\,(1+x) - ln\,(1-x)\,]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,(\frac{(1)}{1+x} - \frac{(1)}{1-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x})$$



اللوغاريتم الاعتيادي Logarithm

يسمى log باللوغاريتم الاعيتيادي لاحظ

$100 = 1o^2 \rightarrow log_{10}^{100} = 2$

$1000 = 10^3 \rightarrow log_{10}^{1000} = 3$

$8 = 2^3 \rightarrow log_2^8 = 3$

$9 = 3^2 \rightarrow log_3^9 = 2$

$a^y = x \rightarrow log_a^x = y$

و عندما تكون $a = 10$ نحصل على اللوغارتيم الاعتيادي $log_{10}^x y =$

اشتقاق اللوغارتيم الاعتيادي

if $y = log_a^u \quad , u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \ln a} \cdot \frac{du}{dx}$$

اشتقاق log = $\frac{1}{\text{الدالة} * \ln \text{الاساس}}$ * مشتقة الدالة

Examples :-

(1) $y = log_7^{x3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 \ln 7} * 3x^2 = \frac{3}{x \ln 7}$$

$y = log_3^{tanx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x \,.\, ln3} \,.sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2 x}{\tan x \,.\, ln3}$$

1- الدالة y ذات الأساس e $y = e^x$

$e = 2.718$

$if\ y = e^u, \quad u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = e^u . \frac{du}{dx}$$

Ex 1 :

$y = e^{3x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{3x} . (3)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\, e^{3x}$$

Ex 2:

$$y = e^{cos2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x . e^{cos2x}$$

2- مشتقة الدالة الاسية العامة

$y = a^u \qquad u = f(x) \qquad a =$ عدد ثابت

$$\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$$

$Ex\ (1) \quad y = 7^{tanx}$

$\frac{dy}{dx} = 7^{tanx}.ln7.sec^2x$

$Ex\ (2)$

$y= 3^{(x-2)^2}$

$\frac{dy}{dx} = 3^{(x-2)^2}\ .ln3\ .2(x-2)\ .(1)$

مشتقة متغير مرفوع الى متغير

لاحظ الدالة $y = x^{tanx}$ .. في هذه الدالة كل من الاس والاساس متغيرين فنلجأ الى أخذ lnالطرفين كي نحلها

Ex (1)

$y = x^{\tan x}$

$lny = tanx.lnx$ (الخاصية الثالثة)

$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \tan x\ \frac{1}{x} + \ln x\ sec^2\ x$

$\frac{dy}{dx} = y(\tan\frac{1}{x} + \ln x\ sec^2\ x)$

Ex (3)

$y = x^{(x^2-1)}$

$lny = lnx^{(x^2-1)}$

$lny = (x^2-1)\ ln\ x$

$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x^2-1)\ .1/x\ +\ ln\ x\ .2x$

$\frac{dy}{dx} = y\ [\frac{x^2-1}{x} +\ 2x\ ln\ x\ ]\ .$

الأسبوع الثاني عشر

- الأسبوع الرابع عشر

تطبيقات المشتقة / التزايد

والتناقص / النهايات العظمى

والصغرى / رسم الدوال /

تطبيقات فيزياوية وهندسية عامة

تطبيقات على المشتقة :

1. النهايات العظمى والصغرى .

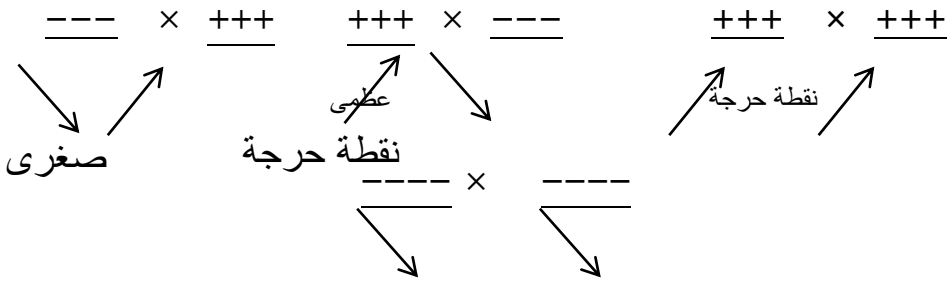
خطوات الحل :

اولاً: نجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$

ثانياً : نجد قيمة(x) بجعل $y^- = 0$ثم نعوض قيمة (x) الناتجة في المعادلة الاصلية لايجاد قيمة (y).

ثالثاً: نختبر قيمة (x) باخذ قيم اصغر واكبر منها ونعوضها في y^- .

رابعاً: نرسم خط الاعداد ونلاحظ تغير الاشارة فاذا تغيرت الاشارة من السالب الى الموجب فانها تمثل نهاية صغرى واذا تغيرت من الموجب للسالب فانها تمثل نهاية عظمى واذا لم تتغير الاشارة فانها مجرد نقطة حرجة.



مثال (1): جد النهايات العظمى والصغرى للدالة

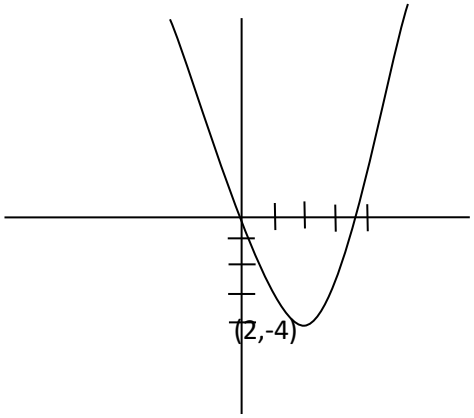
$$\mathbf{y = x^2 - 4x}$$

$$\mathbf{y^- = 2X - 4}$$

$$\mathbf{0 = 2X - 4}$$

$$\mathbf{2X = 4}$$

$$\mathbf{\therefore X = 2}$$



$$\mathbf{Y = (2)^2 - 4(2) = 4 - 8 = -4}$$

∴ النقطة $(2, -4)$ مرشحة ان تكون نهاية عظمى او صغرى او نقطة حرجة.

نختبر النقطة X=2

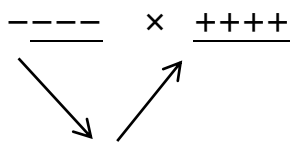
1. ناخذ قيمة الـ X اصغر من (2) ولتكن X=1 ونعوضها في y^-

$$y^- = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$$

2. نأخذ قيمة الـ X اكبر من (2) ولتكن X=3 ونعوضها في y^-

$$y^- = 2(3) - 4 = 6 - 4 = +2$$

3. **نرسم خط الاعداد حيث نلاحظ تغير الاشارة من السالب للموجب فتكـــــون** النقطة $(2,-4)$ نهاية صغرى .



مثال (2) جد النهايات العظمى والصغرى للدالة:

$$y = 5 + 6 - 3X^2$$

$$y^- = 6 - 6X$$

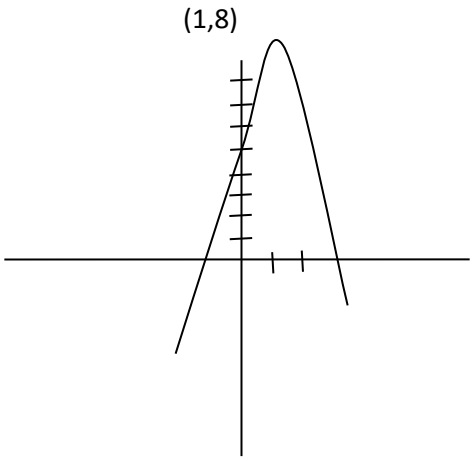
$$0 = 6 - 6X$$

$$6x = 6$$

$$X = 1$$

$$Y = 5 + 6(1) - 3(1)^2$$

$$Y = 8$$



∴ النقطة المرشحة هي (1,8)

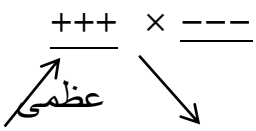
1. نأخذ قيمة لـ X اصغر من (1) ولتكن X=0

$$y^- = 6 - 6(0) = +6$$

2. نأخذ قيمة الـ (X) اكبر من (1) ولتكن X=2

$$y^- = 6 - 6(2) = 6 - 12 = -6$$

من خط الاعداد نلاحظ تغير الاشارة من الموجب الى السالب اي النقطة (1,8) نهاية عظمى.



مثال (3) جد النهايات العظمى والصغرى للدالة :$y = x^3$

الحل:

$$y = x^3$$

$$y^- = 3x^2$$

$$0 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{0}{3} \qquad x = 0$$

$$y = 0^3 = 0$$

∴ النقطة المرشحة هي (0,0)

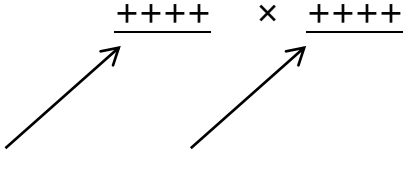
1. نأخذ قيمة الـ X اصغر من (0) ولتكن X=−1 ونعوضها في y^-

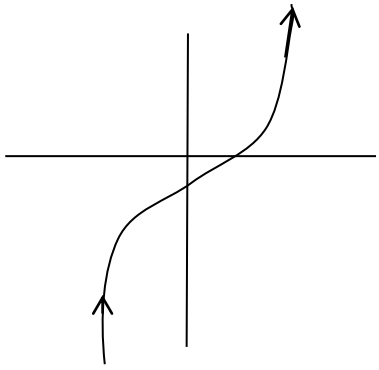
$$y^- = 3(1)^2 = +3$$

2. نأخذ قيمة الـ X اكبر من (0) ولتكن X=1 ونعوضها في y^-

$$y^- = 3(+1)^2 = +3$$

من خط الاعداد نلاحظ عدم تغير الاشارة اي النقطة (0,0) هي نقطة حرجة





السرعة والتعجيل

1- نعلم ان سرعة الجسم تنتج من تغيير الازاحة بالنسبة للزمن فتكون السرعة مشتقة المسافة بالنسبة الى الزمن . اذا رمزنا الى الازاحة بالرمز (s) والزمن بالرمز (t) والسرعة (v) فتكون السرعة

$$v = \frac{ds}{dt}$$

2- كما ان تعجيل الجسم ينتج من تغير سرعته بالنسبة للزمن فيكون التعجيل مشتقة السرعة بالنسبة للزمن فأذا رمزنا للتعجيل بالرمز a

$$a = \frac{dv}{dt}$$

ملاحظة

وحدات الازاحة متر (m)

وحدات الزمن (sec) ثانية

وحدات السرعة $\left(\frac{m}{\sec}\right)$ $\frac{\text{متر}}{\text{ثانية}}$

وحدات التعجيل $\left(\frac{m}{\sec^2}\right)$ $\frac{\text{متر}}{\text{ثا}^2}$

مثال (1)

جسم يتحرك وفق المعادلة $\vec{s} = 4t^3 + 5t^2$ جد تعجيل الجسم بعد مرور 10ثواني من حركته

$$v = \frac{ds}{dt} = 12\,t^2 + 10\,t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 24t + 10$$

$$a = 24\,.(10) + 10 = 240 + 10 = 250\,\frac{m}{sec^2}$$

مثال (2) جد اقصى ارتفاع يصله جسم يقذف حسب المعادلة

$$\vec{s} = 128t - 16t^2$$

$\vec{v}=\frac{ds}{dt} = 128 - 32t$

عند اقصى ارتفاع سرعة الجسم = 0

$0 = 128 - 32\,t$

$\therefore 32\,t = 128$

$t = \frac{128}{32} = 4\,sec$

$\vec{s} = 128\,.(4) - 16\,.4^2$

$\vec{s} = 512 - 256 = 256\,m$

مثال (3)

سيارة تسير حسب المعادلة $\vec{v} = -6\,cost$ احسب التعجيل بعد مرور $45sec$ من بدء الحركة

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -6.(-sint)$

$\vec{a} = +6\,\sin t$

$\vec{a} = 6\,sin\,45$

$\vec{a} = 6\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\,\frac{m}{sec^2}$

<u>معادلة المستقيم</u>

ان المشتقة $\frac{dy}{dx}$ لاي منحني = ميل المستقيم المماس للمنحني من نقطة التماس وتكون معادلة المستقيم عند توفر نقطة وميل بالصيغة التالية

$y - y0 = m\,(x - x\,0)$

مثال :

جد معادلة المستقيم الذي يمس المنحني $y = x^3 - 3x^2 + 2$ في النقطة $(1,2)$

$y = x^3 - 3x^2 + 2$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 3(1)^2 - 6(1)$

$\frac{dy}{dx} = 3 - 6 = -3$

$y - y0 = m\,(x1 - x0)$

$y - 2 = -3\,(x - 1)$

$y - 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 3 + 2$

$y = -3x + 5$

الأسبوع الخامس عشر

التكامل / التكامل الغير محدد /

تكامل الدوال الجبرية

واللوغارتيمية

التكامل $The\ integration$

يعرف التكامل بأنه ايجاد الدالة التي علمت مشتقتها . اي العملية العكسية لعملية ايجاد المشتقة . ولقد لاحظنا العديد من العمليات الرياضية ذات الطابع العكسي . فالطرح هو عملية عكسية للجمع . والقسمة هي معكوس عملية الضرب لذا من الطبيعي ان توجد عملية معكوسة لعملية التفاضل يطلق عليها عكس التفاضل اي التكامل

التكامل غير المحدد Idefinte integraL

يقال للدالة $F(x)$ عكس مشتقة الدالة $f(x)$ حيث c ثابت التكامل والرمز $\int$ هو دلالة على عملية التكامل

<u>قوانين التكامل</u>

1. $\int a\,dx = ax + c$ حيث a عدد ثابت , c ثابت التكامل

2. $\int axdx = a\int x\,dx = a\,(\frac{x^2}{2}) + c$

3. $\int [f(x)dx \pm g(x)]\ dx = \int f(x))\ dx \mp \int g(x)\,dx$

4. $\int x^m\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ حيث $m \neq -1$

5. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ يمكن تعميم التالي $n \neq -1, u = f(x)$

القانون بالشكل

جد تكامل الدوال التالية

1. $\int X^2\,dx$

$= \int \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$

$= \frac{x^3}{3} + c$

2. $\int 4X^3\,dx = 4\frac{x^4}{4} + c = x^4 + c$

3. $\int x^4 + 3x^2 + 5)\ dx$

$$= \frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + c$$

$$4.\int \frac{(5\,x^4 + 2x)}{x^3}\,\mathrm{dx}$$

$$= \int \frac{5\,x^4}{x^3}\,dx + \int \frac{2x}{x^3}\,dx$$

$$= 5\int x\,dx + 2\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{2}{x} + c$$

$5.\int(2\mathrm{x}-6)\,3\,\mathrm{dx}$ يمكن حل السؤال بطريقتين

الطريقة الأولى: في حالة قوس مرفوع الى أس يجب ان نوفر مشتقة داخل القوس وفي المثال التالي مشتقة داخل قوس هي (2)

$= \frac{1}{2}\int(2\mathrm{x}-6\,)^3\;2\mathrm{dx}$ نضرب في $\frac{2}{2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x-6)^4}{4} + c$$

$$= \frac{(2x-6)^4}{8} + \mathrm{c}$$

الطريقة الثانية: نفرض

$$u = 2x - 6$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$= \int u^3\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + \mathrm{c}$$

$$= \frac{u^4}{8} + \mathrm{c}$$

$$= \frac{(2x-6)^4}{8} + c$$

$$6.\int(x^2 + 2x - 5)^3\;(x+1)\,dx$$

$u = x^2 + 2x - 5$

$\frac{du}{dx} = 2x + 2 = 2(x+1)$

$\frac{1}{2} du = (x+1)\, dx$

$\int (x^2 + 2x - 5)^3 \ (x+1)\, dx = \frac{1}{2} \int u^3 du$

$= \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8} (x^2 + 2x - 5)^4 + c$

<u>الدالة التي تكاملها بشكل لوغاريتم</u>

الدالة المتكونة من بسط ومقام ومشتقة المقام موجودة في البسط فأن تكامل هذه الدالة هي لوغاريتم المقام +ثابت التكامل

$if\ u = f(x)$

$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$

Ex. 1 $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

نلاحظ ان $2x$) وهي موجودة في البسط

) مشتقة المقام

$\therefore \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = ln\,(x^2+1) + c$

$Ex2.\ \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$

$= \ln(1+\sin x) + c$

$Ex3.\ \int \frac{1}{3x}\, dx$

$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x}\, 3dx$

$= \frac{1}{3} \ln(3x) + c$

4. $\int \frac{x^2}{7x^3+8}\, dx$

$= \frac{1}{21}\int \frac{21x^2}{7x^3+8}\, dx$

$= \frac{1}{21}\ln(7x^3+8) + c$

5. $\int \frac{x^3\, sec^2 x^4}{tan\, x^4}\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\, sec^2\, x^4}{\tan x^4}\, dx$

$= \frac{1}{4}\, ln\, (tan\, x^4)\, + c$