الرياضيات التطبيقية

✯المصفوفات والمحددات Matrixes and determinants✯

المصفوفة : المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل . وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على أنها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية والمعقدة
يُرمز للمصفوفة بالرموز ....A,B,C ومُدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij} :

$$A = [a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & & a_{mn} \end{vmatrix}_{m*n}$$

المصفوفة مدخلات المصفوفة

حيث: m ← صف
n ← عمود

الصف Row ⟶ i= 1,2,3,.....m
العمود Column ⟶ j= 1,2,3,.....n

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة Aمن السعة m*n واذا كان m=n (أي ان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة)

✎ **Example:(1)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

♧أنواع المصفوفات Diagonal Matrix (المصفوفة القطرية)

المصفوفة القطرية: تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابتة (C) Constant حيث ان aij=c لكل i=j

✎ **Example:(2)**

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4*4}$$

القطر الثانوي

المصفوفة الصفرية: Zero Matrix أو Null Matrix
وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار

Example :(3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Identity Matrix : المصفوفة الوحدة

هي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار . ونرمز لها بالرمز I .

Example:(4)

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Triangular Matrix : المصفوفة المثلثية

i- المصفوفة المثلثية العليا :وهي المصفوفة التي تكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الرئيسي تكون أصفار .

Example:(5)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3*3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

ii- المصفوفة المثلثية السفلى :وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي أصفار .

Example:(6)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3*3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Transpose of Matrix : مُدور المصفوفة

وهي تغيير أعمدة المصفوفة بدل صفوفها أو تغيير الصفوف بدل الأعمدة

Example:(7)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2*3} \quad ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3*2}$$

المصفوفة المنفردة :
هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها يساوي صفر ، مثال تمرين (15) .

المصفوفة غير المنفردة :
هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها لا تساوي صفر($\neq 0$)

Example: (8)

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2*2}$$

قيمة المحدد $|A|=2*5-1*4=10-4$

$$\therefore |A|=6$$

ان هذه المصفوفة غير منفردة لان قيمة محددها (6) أي لا يساوي صفر

Example: (9)

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}_{2*2}$$

; $|B|=3*4-2*6$

$=12-12=0$

المصفوفة منفردة لان قيمة محددها يساوي صفر

طريقة إيجاد قيمة المحدد لمصفوفة من السعة 2*2:

القطر الرئيسي ↘ ↙ القطر الثانوي

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

نوجد قيمة المحدد كما يلي : حاصل ضرب القطر الأول الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب القطر الثانوي

$$\therefore D_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

D_2 يسمى محدداً من الدرجة الثانية

المحددات للمصفوفات : Determinants
القيمة العددية للمصفوفات
المحدد : هي مجموعة عناصرها تكتب على شكل صفوف وأعمدة رباعي الشكل ويكون محصور بين مستقيمين شاقوليين ويرمز له بالرمز $|A|$ أو det. A أو D

Example:(10) Find the value of the following determinant

جد قيمة ما يلي للمحددات :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

سالب   موجب

$$|A| = 3*6 - 2*4$$
$$= 18 - 8 = 10$$

أي إن القطر المتجه نحو اليمين (القطر الرئيسي) يكون موجب بينما يكون القطر المتجه نحو اليسار (القطر الثانوي) سالب

مثال: جد قيمة X إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} X & 4 \\ 1 & X \end{bmatrix} = 0$$

Solution : **الحل:**

$$X^2 - 4 = 0$$
$$\therefore X^2 = 4$$
$$\therefore X = \pm 2$$

بعض العمليات الجبرية على المصفوفات:

Addition and subtraction الجمع والطرح

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}_{2*2} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 & a_4 - b_4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

by constant ضرب المصفوفة * ثابت

Example:(11) Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ And C=3 Find $C.A$

Solution : **الحل:**

$$C.A \equiv 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3*1 & 3*3 \\ 3*2 & 3*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 54 = -54$$

Example:(12) Find $|2*A|+|3*B|$ IF :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Solution : **الحل:**

$$|2*A|=2*\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 6\end{bmatrix}=12-0=12$$

$$|3*B|=3*\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 3 & 9\end{bmatrix}=0-(-6*3)=18$$

$$\therefore |2*A|+|3*B|=12+18=30$$

إيجاد المحددات لمصفوفة من السعة 3*3:

هناك عدة طرق لإيجاد المحددات من السعة 3*3

الطريقة الأولى : الطريقة الخاصة أو طريقة التدوير (Rotate)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$|A|=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\right|$$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب إلى يمين المحدد

إيجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الأقطار الموجبة والسالبة كما هو مبين في الأسهم (أعلاه) وكما يلي :

$$|A|=(a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})$$
$$-(a_{13})(a_{22})(a_{31})-(a_{11})(a_{23})(a_{32})-(a_{12})(a_{21})(a_{33})$$

الطريقة الثانية(طريقة التجزئة)

لإيجاد قيمة المحدد يجب ملاحظة قانون الإشارات أو (قاعدة الإشارات) المبينة أدناه للعناصر داخل المحدد بغض النظر عن إشارة العنصر نفسه

يُفتح المحدد بستة طرق وكالاتي :

باستخدام الصف الأول

باستخدام الصف الثاني

باستخدام الصف الثالث

باستخدام العمود الأول

باستخدام العمود الثاني

باستخدام العمود الثالث

★ملاحظة★ :تكون إشارة العنصر الأول في الصف الأول والعمود الأول ثابتة في حين تكون بقية العناصر فيما يتعلق بالصف الأول والعمود الأول مخالفة للعنصر الذي يسبقها بالإشارة.

☀قاعدة الإشارات☀

	العمود الاول	العمود الثاني	العمود الثالث	
الصف الأول R1	+	-	+	$(-1)^{i+j}$ i= رقم الصف j= رقم العمود
الصف الثاني R2	-	+	-	
الصف الثالث R3	+	-	+	

$Ex\ (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$

Example:(13) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}_{3*3}$$

الحل:

Solution :

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}\right|$$

$$|A| = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(-8)$$
$$-(3)(5)(7) - (1)(6)(-8) - (2)(-4)(9)$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72$$
$$\therefore |A| = 240$$

Example:(14) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

<u>Solution</u> : 							الحل:

$$|A| = \left|\begin{matrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & -5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$|A| = (2*0*-1)+(-5*7*0)+(4*2*1)-(4*0*0)-(-2*7*1)-(-5*2*-1)$$

$$\therefore |A| = 0+0+8-0+14-10$$

$$\therefore |A| = 12$$

<u>Example:(15)</u> Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي بطريقة التجزئة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل بالنسبة للصف الأول :

$$|A| = 2\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-7+36)-3(35-18)-4(-30+3)$$

$$|A| = 2(29)-3(17)-4(-27)$$

$$|A| = 58-51+108=115$$

الحل بالنسبة للصف الثاني :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5(21-24)-(14+12)-6(-12-9)$$

$$|A| = 15-26+126=115$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمة المحدد

<u>Example:(16)</u> Find the value of the det .A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution : الحل:

$$|A| = 1^{*}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 1^{*}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2^{*}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1 - 1 + 4 = 2$$

★ملاحظة★ :

ان طريقة تفيد في حل المحددات من الدرجة الرابعة والخامسة . وبذلك يمكن دمج الطريقتين : طريقة التجزئة مع الطريقة الخاصة (طريقة التدوير) لحل محدد من الدرجة الرابعة .

1- المعادلات الخطية :

Example(1): ***Solve the linear equations***

مثال : حل النظام الخطي بعدة طرق

$$x + y = 4 \qquad \cdots(1)$$
$$3x - 2y = 2 \qquad \cdots(2)$$

الطريقة الأولى : طريقة الحذف وكما يلي :

نضرب المعادلة (1) *3 والمعادلة (2) *1- ينتج :

$$3x + 3y = 12 \qquad \cdots(1)$$
$$-3x + 2y = -2$$

بالجمع

$$5y = 10 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة ينتج :

$$\therefore y = 2$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 2$$

الحل باستخدام المصفوفة

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

نضرب الصف الأول *3

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

بطرح الصف الثاني من الصف الأول

$$R_1 - R_2 \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \therefore 5y = 10 \quad \Rightarrow \therefore y = 2$$
$$\therefore x = 2$$

حل النظام هو x=2
Y=2

♚نظرية أو قاعدة كَرامر Gramer's Rule♚

لتكن AX=B نظام من المعادلات الخطية التي رتبتها n*n وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها 0≠|A| عندئذ يكون للنظام حل وحيد أي ان :

$$X1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad ,........, Xn = \frac{|An|}{|A|}$$

✎**Example(2): Find the solution of x,y by using Gramer's Rule**

استخدم قاعدة كَرامر لحل نظام المعادلات :

$$2x - 3y = 8 \qquad \cdots(1)$$
$$3x + y = 1 \qquad \cdots(2)$$

Solution :

الحل:

اجعل النظام بشكل صيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* نستخرج المحدد الأصلي للمصفوفة (D)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2*1) - (-3*3)$$
$$= 2 + 9 = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (8*1) - (-3*1)$$
$$= 8 + 3 = 11$$

نستخرج المحدد (D2) وذلك بحذف العمود الثاني والتعويض عنه بالعمود الثالث (عمود الحدود المطلقة) وكمايلي :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_2 = 2 - 24$$

$$\therefore D_2 = -22$$

$$X = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{-22}{11} = -2$$

$$\therefore x = 1 \quad , \quad y = -2$$

:Proof ☻ التحقيق

نعوض عن قيم x,y في المعادلتين أعلاه ينتج

$$2 + 1 - 3(-2) = 8$$
$$2 + 6 = 8$$
$$8 = 8$$

مثال (3): استخدام قاعدة كَرامر لحل المعادلات الخطية

$$x - y = 1$$
$$x - z = 3$$
$$y + z = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{D_1}{D} \quad , \; y = \frac{D_2}{D} \quad , z = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} a$$

$$D = 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 0 + 1) + 1(\ 1) + 0 = 1 + 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 1) + (\ 3 + 8) + 0 = 1 + 11 = 12$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 3 + 8) - 1(\ 1) = 11 - 1 = 10$$

$$\therefore D_2 = 10$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=1\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=1(\ 0-3)+1(\ 8)+1(\ 1)$$
$$=-3+8+1=6$$

$$X=\frac{D_1}{D}=\frac{12}{2}=6\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{10}{2}=5\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{6}{2}=3$$

✎ **<u>Example</u>(4): Find the solution of x,y,z by using Gramer's Rule**

(استخدم قاعدة كَريمر لايجاد قيم x,y,z)

$$4x+y+z=5 \quad \text{........(1)}$$
$$3x+y+4z=10 \quad \text{.......(2)}$$
$$x+y+z=2 \quad \text{.........(3)}$$

<u>Solution</u> : الحل:

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 2\end{bmatrix}$$

$$D=\left|\begin{matrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$$D=4+4+3-1-16-3=-9 \ \ \Rightarrow\therefore D=-9$$

$$D_1=\left|\begin{matrix}5 & 1 & 1\\ 10 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}5 & 1\\ 10 & 1\\ 2 & 1\end{matrix}$$

$$D_1=5+8+10-2-20-10=-9 \ \ \Rightarrow\therefore D_1=-9$$

$$D_2=\left|\begin{matrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 10 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}4 & 5\\ 3 & 10\\ 1 & 2\end{matrix}$$

$$D_2=40+20+6-10-32-15\Rightarrow\therefore D_2=9$$

$$D_3=\left|\begin{matrix}4 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 10\\ 1 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$$\therefore X=\frac{D_1}{D}=\frac{-9}{-9}=1\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{-9}=-1\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{-18}{-9}=2$$

✎ **<u>Example</u>(5): Find the value of x**

جد قيمة x

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Solution</u> :

الحل:

$$\left[\begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 4 & 1 \\ 2x^2 & -x \\ -1 & 1 \end{matrix}\right] = 0$$

$$4x - 1 + 4x^2 - 2x - 4 + 2x^2 = 0$$

$$6x^2 + 2x - 5 = 0$$

a b c

*** المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية لذلك نستخدم طريقة الدستور لحل هذه المعادلة**

قانون الدستور

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث : a=6 , b=2 ,c=-5

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)}$$

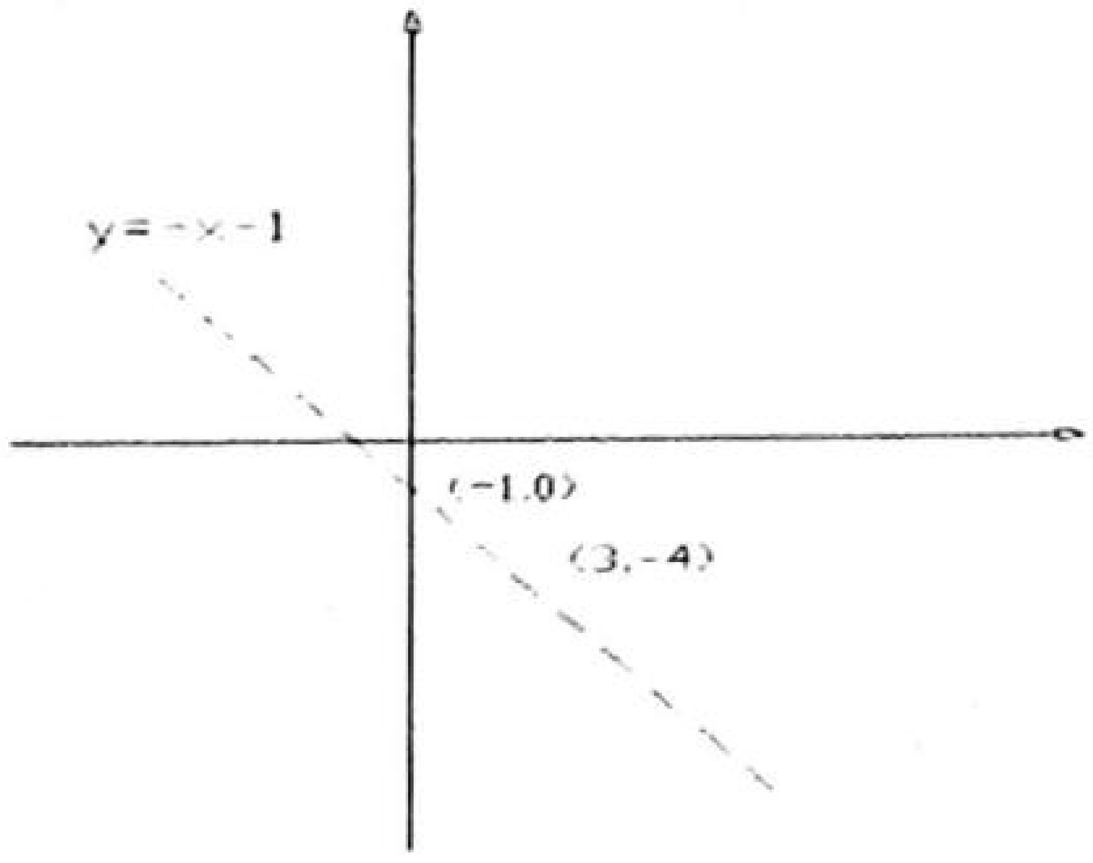
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 120}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{124}}{12}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 * 31}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{31}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}$$

$$\therefore \text{if } x = \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} \text{ or } x = \frac{-1 + \sqrt{31}}{6}$$

مثال(6) : اثبت ان حل المحدد التالي هو عبارة عن معادلة خط مستقيم يمر بالنقاط (3,- 4) ,(-1,0) مع الرسم ؟

x	y
0	−1
1	−2
−1	0



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

الحل:

Solution :

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4x - y + 0 - 4 - 0 - 3y = 0$$
$$-4x - 4y - 4 = 0$$

بالقسمة على 4 – ينتج :

معادلة المستقيم ⟵ $x + y + 1 = 0$

نعوض في النقاط (-1,0) ينتج :

$$(-1,0) \Rightarrow -1 + 0 + 1 = 0$$

النقطة ,(3,- 4) ينتج :

$$(3,\ -4) \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$$

تمارين تطبيقية :-

1) $3x+3y=2$

$6x+3y=1 \quad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=1$

---

2) $3x-y=2$

$3x-2y=5 \quad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=-3$

---

3) $3x+4y=11$

$-x+2y=3 \quad \Rightarrow x=1$

$y=2$

---

4) $3x=5+y$

$-x=2-4y \quad \Rightarrow x=2$

$y=1$

---

5) if $A=\begin{bmatrix}5 & y\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ x^2-1 & 2\end{bmatrix}$

and if $[A]=[B]$ Find the value of x and y

---

6) find the value of k by det.

$\begin{bmatrix}2k & 1\\ 8 & 1\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & k\end{vmatrix}$

---

7) if $A=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & y\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}x^2-1 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

and if $[A]=[B]$ Find the value of x and y

---

8) Find the value of a,b,c if

$$\begin{bmatrix}5b+1 & 0\\ 3c & 8\\ -3 & 2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 9 & 8\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

---

9) $\begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 0$ Find the value of x and

proof has roots $x = 2$, $x = -3$

---

10) Find the determint of order A,B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 6 \qquad \Rightarrow |B| = -2$$

---

11) $x = 1 - y - 2z$ $\qquad x = \frac{1}{2}$ By Gramer's Rule

$2x - y - z = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$

$x + 2y = 4 + z \qquad z = -\frac{1}{2}$

---

12) Find the value of x,y,z by Gramer's Rule

$2x + y - z = 0 \qquad x = 2$

$x + z - y = 6 \qquad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 3 \qquad z = 3$

---

13) $2x + y - z = 2 \qquad x = 3$

$x - y + z = 7 \qquad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 4 \qquad z = 3$

استخدم المحدد الرباعي لايجاد قيمة t,z,y,x باستخدام قاعدة كَرامر

14) $2x + 3t - y = -3$

$t + 2z + x - 3 = 0$

$3y - 3z + 2t = -13 \quad \Rightarrow |A| = 105$

$4x + 3y + 2z = 5 \quad \Rightarrow |A_1| = 105$

$\Rightarrow |A_2| = 105$

---

15) $2x - y + z = 4$

$x + 3y + 2z = 12 \quad \Rightarrow |A| = 0$

$3z + 2y + 3x = 16$

Complex Numbers الاعداد المركبة « العقدية »

تعريف :-
يعرف العدد المركب z بانه الزوج المرتب (a, b)
اي أن $z = (a, b)$ كما يمكن كتابته بالصيغه $z = a + ib$
التي تسمى بالصيغه الجبرية « العادية » للعدد المركب

* يسمى الحد الاول a بالجزء الحقيقي Real part ويرمز له بالرمز $R_e(z)$ أي أنه $a = R_e(z)$

* يسمى الحد الثاني b بالجزء التخيلي Imaginary part ويرمز له بالرمز $I_m(z)$ أي انه $b = I_m(z)$

* يسمى i بالوحدة التخيلية Imaginary unit حيث

$$i = \sqrt{-1} = (0, 1)$$

ملاحظة :-

* العدد $(a, 0) = a = a + 0i$ يسمى عدد حقيقي بحت
* العدد $(0, b) = bi$ يسمى عدد تخيلي بحت

Example :

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

ملاحظة :- عند رفع العدد (i) لعدد صحيح موجب فان الناتج يكون أحد عناصر المجموعة {$1, -1, i, -i$} ويمكن الحصول عليه من قسمة الاس i على العدد 4 والباقي من ناتج القسمة هو الأس الجديد للعدد i

Example: اكتب مايلي في ابسط صورة

① i^{16} ② i^{25} ③ i^{58} ④ i^{99} ⑤ i^{-13}

solution:

① $i^{16} = i^{0} = 1$

② $i^{25} = i^{1} = i$

③ $i^{58} = i^{2} = -1$

④ $i^{99} = i^{3} = -i$

⑤ $i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{1}{i} = -i$

Example: اكتب الاعداد الاتية على الصورة $x+iy$ ثم جد $Re(z)$ ، $Im(z)$

① $\sqrt{-50}$ ② -100 ③ $\frac{1+\sqrt{-16}}{4}$

solution:

① $\sqrt{-50} = \sqrt{50\,(-1)} = 5\sqrt{2}\, i = 0 + 5\sqrt{2}\, i$

$Re(z) = 0 \quad , \quad Im(z) = 5\sqrt{2}$

② $-100 = -100 + 0i$

$Re(z) = -100 \quad , \quad Im(z) = 0$

③ $\frac{1+\sqrt{-16}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{4i}{4} = \frac{1}{4} + i$

$Re(z) = \frac{1}{4} \quad , \quad Im(z) = 1$

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x}\, i$$

ملاحظات : ①

Example: $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12}\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\, i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$

② يتساوى العددان المركبان اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس .

اي اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$

فان $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$

③ يكون العدد المركب مساوياً الصفر اذا وفقط اذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي مساوياً للصفر اي انه

$$z = x + iy = 0 \iff x = 0 \ , \ y = 0$$

Example جد قيم x ، y التي تحقق المعادلة

$$(x - y - 6) + (y^2 - x)\, i = 0$$

solution:

$x - y - 6 = 0 \Rightarrow x = y + 6$ ①

$y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0$ ②

بتعويض معادلة ① في معادلة ②

$y^2 - y - 6 = 0$

$(y - 3)(y + 2) = 0$

either $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

or $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

$\therefore$ عندما $y = 3$ $\Rightarrow$ $x = 3 + 6 = 9$

عندما $y = -2$ $\Rightarrow$ $x = -2 + 6 = 4$

$\therefore S \cdot S = \{(9, 3), (4, -2)\}$

Example: جد قيمة كل من x ، y اذا كانت

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$$

Solution: $2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2$

$$x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 1$$

Conjugate Number مرافق العدد المركب

تعريف / مرافق العدد المركب $z = a + ib$ يرمز له بالرمز $\bar{z}$ وهو العدد المركب $\bar{z} = a - ib$ اي انه ينتج من تغيير اشارة الجزء التخيلي فقط .

Example: جد مرافق كل من الاعداد المركبة التالية

① $z = 5 - 4i$ ② $z = -8$ ③ $z = i$ ④ $z = 15$

solution: ① $\bar{z} = 5 + 4i$

② $\bar{z} = -8$

③ $\bar{z} = -i$

خواص مرافق الاعداد العقدية (المركبة)

ليكن $z = a + ib$

① $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

② $z - \bar{z} = 2i\,I_m(z)$

③ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = [Re(z)]^2 + [I_m(z)]^2$

④ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

⑤ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

⑥ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

اكتب ما يلي بالصورة القياسية «الجبرية» والديكارتية

① $\frac{3+i}{1-i}$ ② $\frac{1}{i}$ ③ $(4-i)^2$

④ $\frac{1}{-3-4i}$ ⑤ $(-3+2i)+(-5-i)$

★ **صيغ كتابة العدد المركب :**

1-صيغة المحاور المتعامدة أو (الصيغة العامة **(Rectangular**

$$Z = x + yi$$

2-الصيغة المثلثية **(Traingular)**

$$Z = r(\text{Cos}\theta + i\text{Sin}\theta)$$

3- الصيغة الأسية (Exponential)

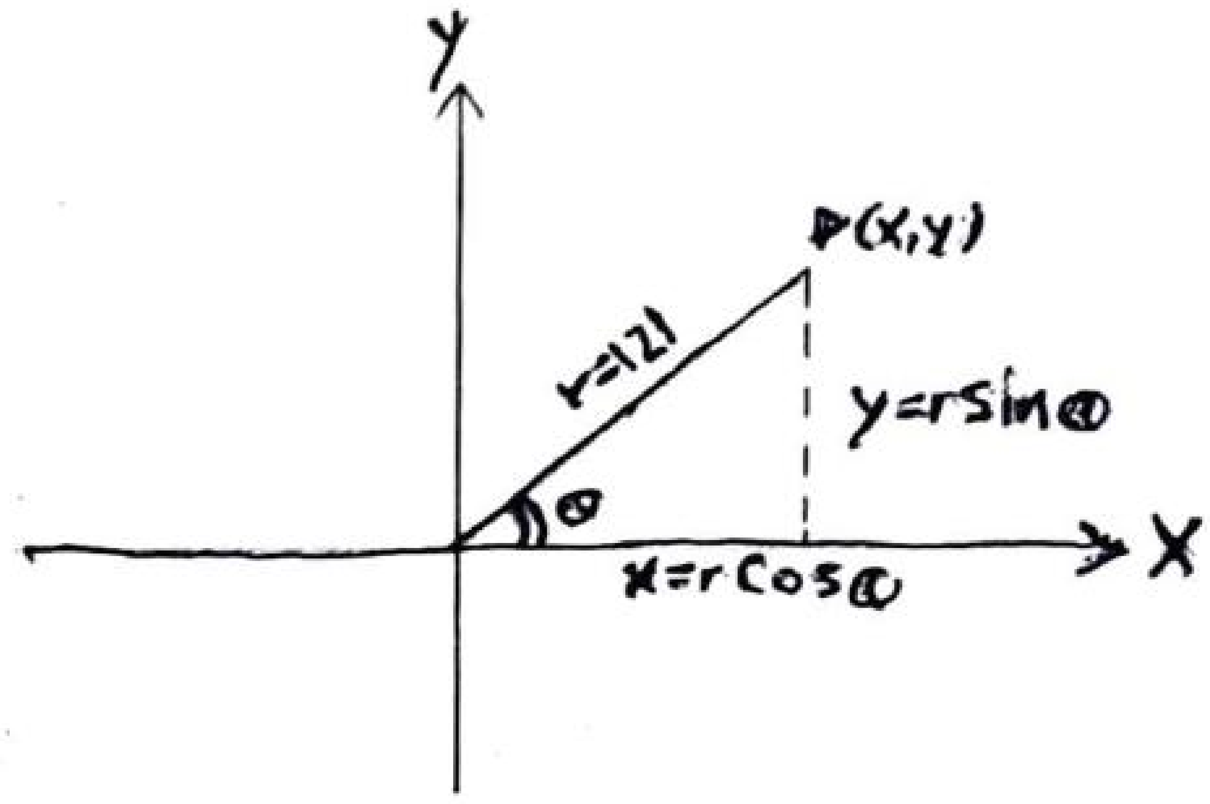
أو صيغة أويلر

$$Z = re^{i\theta}$$

4- الصيغة القطبية **(Polar)**

$$Z = r|\underline{\theta}$$

لتحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية من الصيغة الجبرية



$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z = x + iy$$

من الشكل اعلاه نلاحظ

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \longrightarrow x = r.\text{Cos}\,\theta$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \longrightarrow y = r.\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\,\text{Cos}\theta$$

$$y = r\,\text{Sin}\vartheta$$

$$\therefore Z = x + iy$$

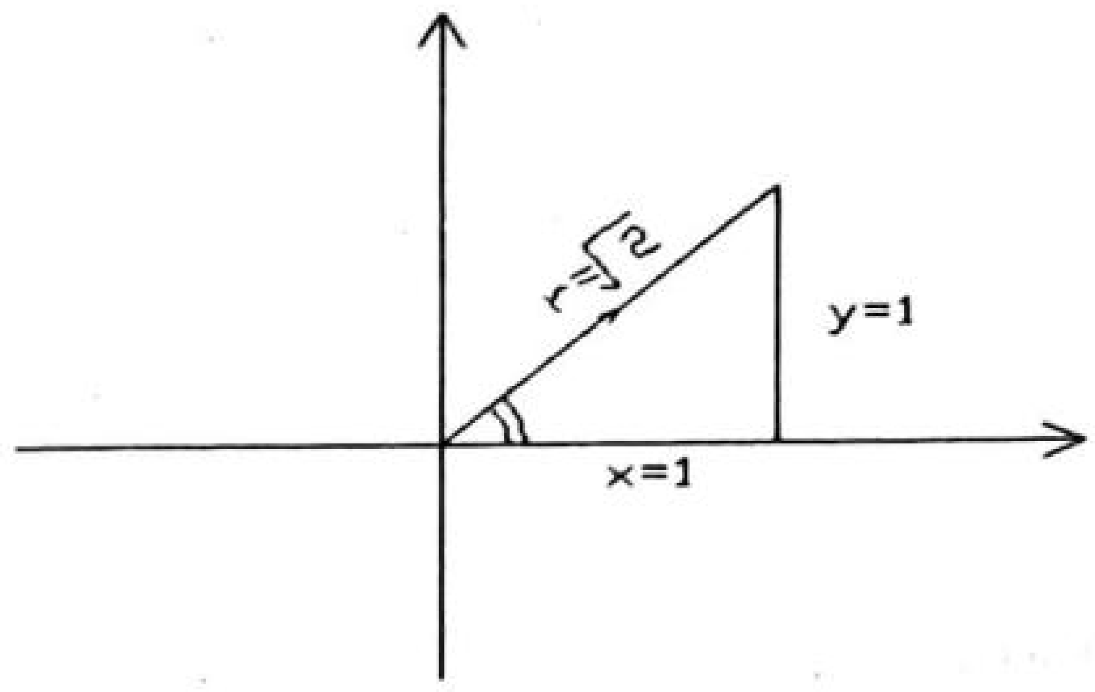
$$Z = r\text{Cos}\,\theta + ir\text{Sin}\,\theta$$

$$= r[\text{Cos}\theta + i\text{Sin}\theta]$$ الصيغة المثلثية

$$Z = re^{i\theta}$$ الصيغة الآسية

$$Z = r|\underline{\theta}$$ الصيغة القطبية

مثال(1) : حول العدد العقدي من الصيغة الجبرية الى القطبية



$Z = 1 + i$

$x = 1 \ , y = 1$

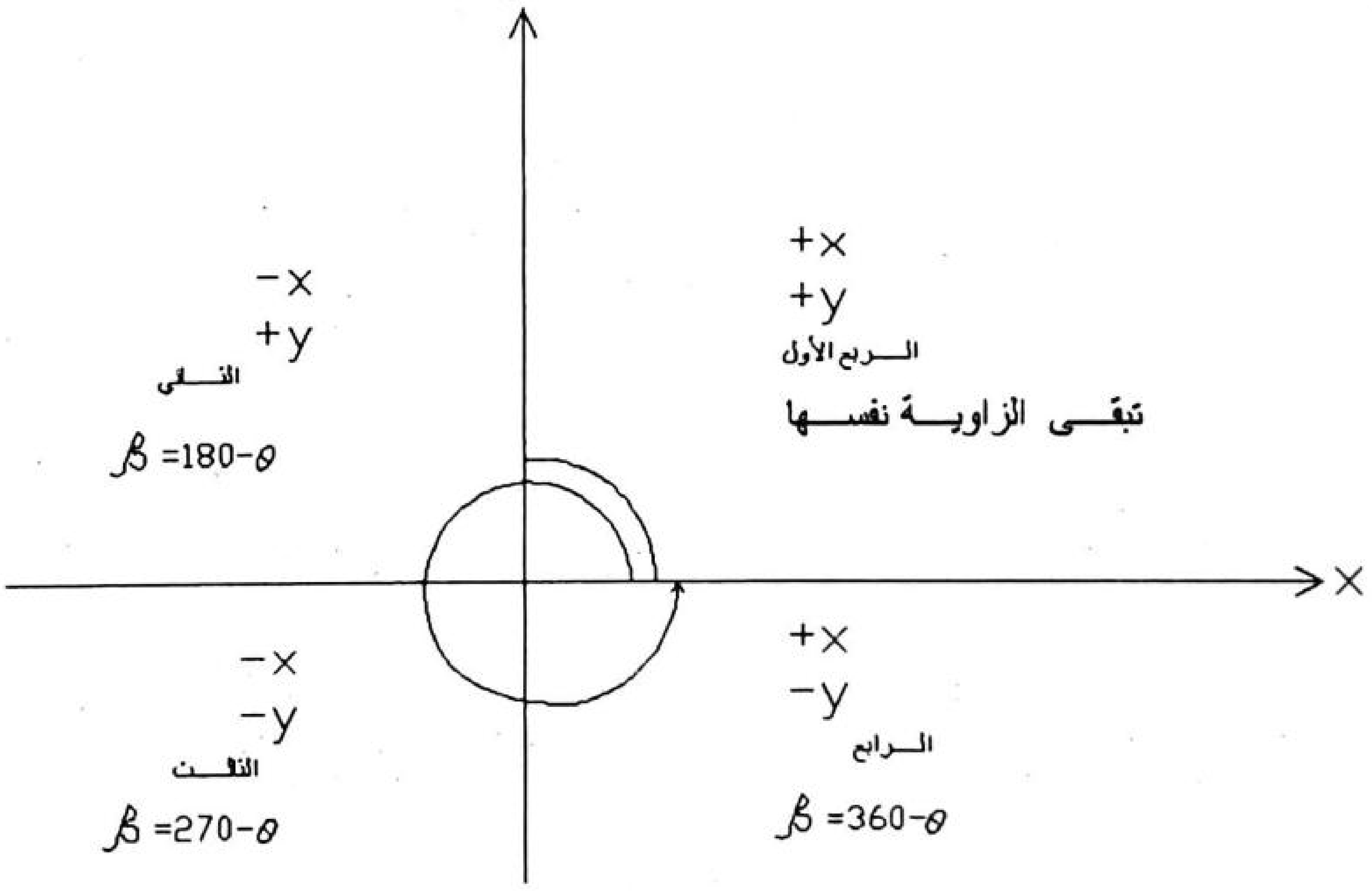
$r = |Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$Cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \theta = 45^\circ$

∴ الزاوية تقع في الربع الأول لا تحتاج الى زاوية متممة .

$\therefore Z = r(\ Cos\theta + i \ Sin\theta)$

الصيغة المثلثية $= \sqrt{2}(\ Cos45^\circ + i \ Sin45^\circ)$

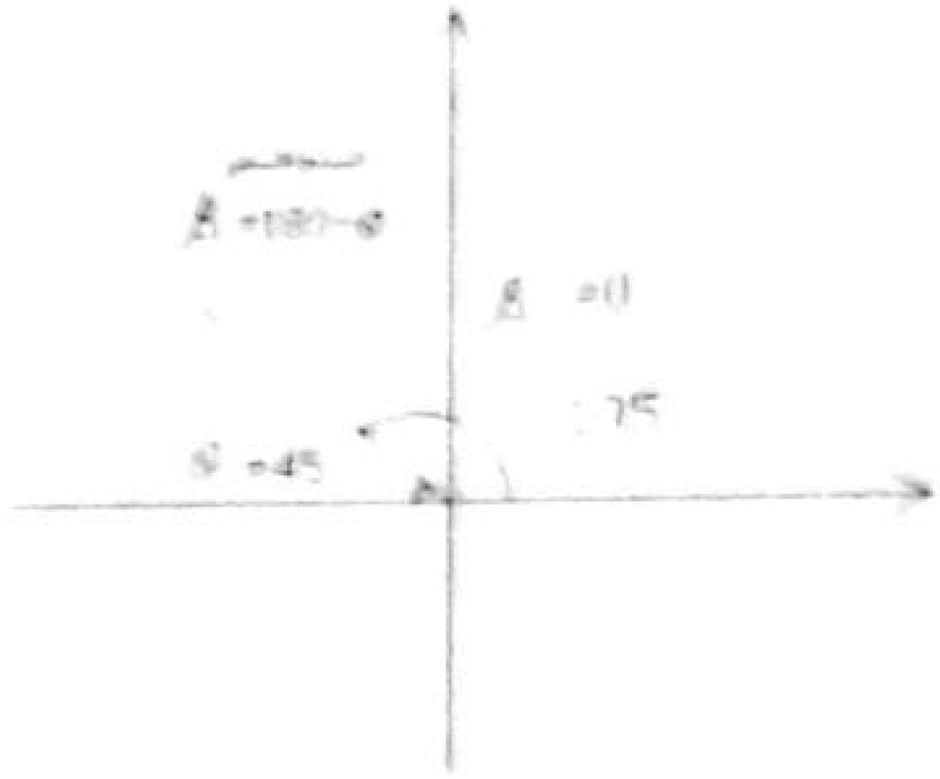


$Z = re^{i\theta}$

الاسية $Z = \sqrt{2}e^{i45}$

القطبية $Z = \sqrt{2} \ \underline{|45^\circ}$

مثال (2) :اكتب العدد بالصيغة القطبية و الأسية .



$$Z = -5 + 5i \Rightarrow x = -5 \ , y = 5$$

$$r = |Z| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{50} = \sqrt{25x2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

∴ يجب إيجاد الزاوية المتممة في الربع الثاني .

$$\beta = 180 - \theta$$

$$\beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 5\sqrt{2}(\ Cos135^\circ + i \ Sin135^\circ)$$

$$Z = 5\sqrt{2} \ e^{i135}$$

$$Z = 5\sqrt{2} \ \underline{|135^\circ}$$

مثال (3) :حول العدد من الصيغة المثلثية الى الصيغة الجبرية .

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\ Cos45^\circ + i \ Sin45^\circ)$$

$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2} \qquad \theta = 45^\circ$$

$$x = r Cos\theta \qquad y = r Sin\theta$$

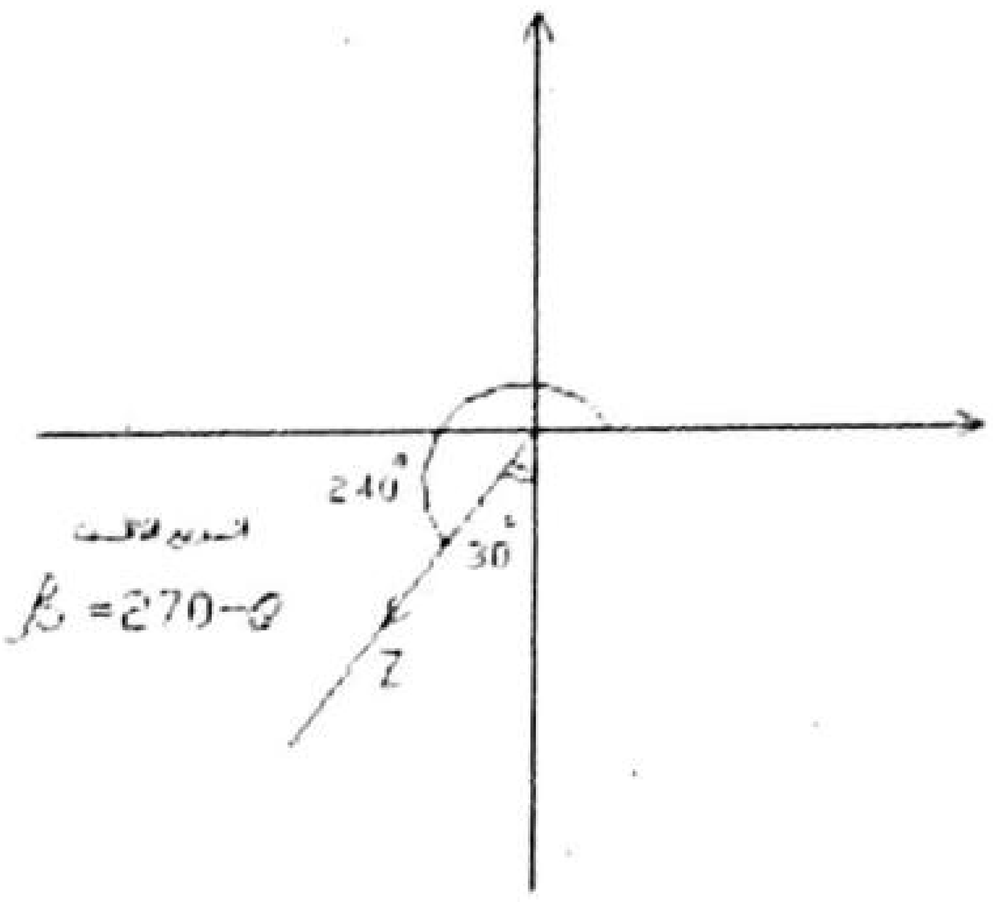
$$x = 2\sqrt{2} \ Cos45^\circ \qquad y = 2\sqrt{2} \ Sin45^\circ$$

$$x = 2\sqrt{2} \ . \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = 2\sqrt{2} \ . \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = 2 \qquad y = 2$$

$$\therefore Z = 2 + 2i$$

مثال (4) :اكتب العدد بالصيغة القطبية والأسية .



$$Z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i \Rightarrow x=-\sqrt{6}\ ,y=-\sqrt{2}$$

$$r=|Z|=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=\sqrt{4x2}=2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x\sqrt{3}} \qquad \therefore \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta=30^\circ$$

تقع في الربع الثالث الزاوية المتممة

$$\beta=270-\theta$$

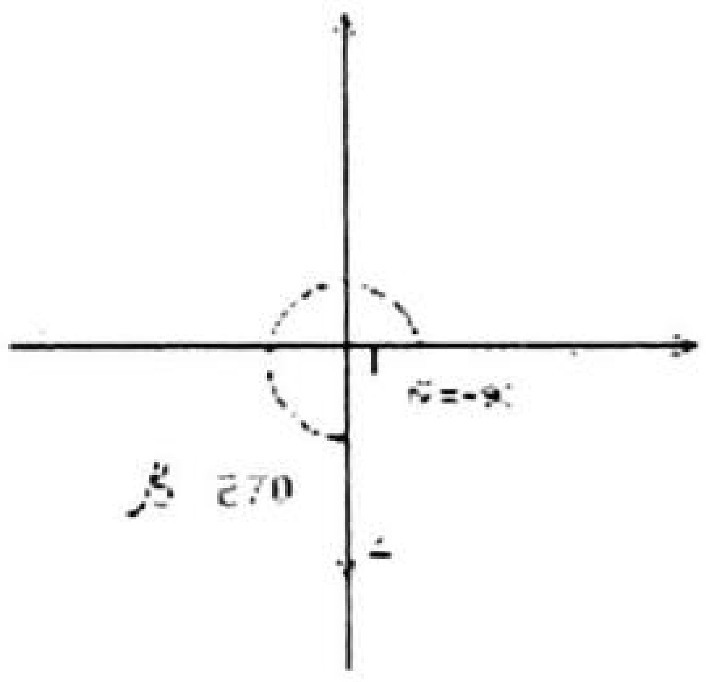
$$\beta=270-30=240^\circ$$

$$\therefore Z=2\sqrt{2}(\ Cos240^\circ+i\,Sin240^\circ)$$

$$Z=2\sqrt{2}\,e^{i240}$$

$$Z=2\sqrt{2}\ \underline{|240^\circ}$$

مثال (5) :اكتب العدد بالصيغة القطبية .



$$Z=-3i$$

$$\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow \quad X=+$$

$$y=-3$$

$$r=|Z|=\sqrt{0+3^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-3}{0}=-\infty \quad \Rightarrow \theta=-90^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع ∴الزاوية المتممة

☀ التفاضل والاشتقاق ☀

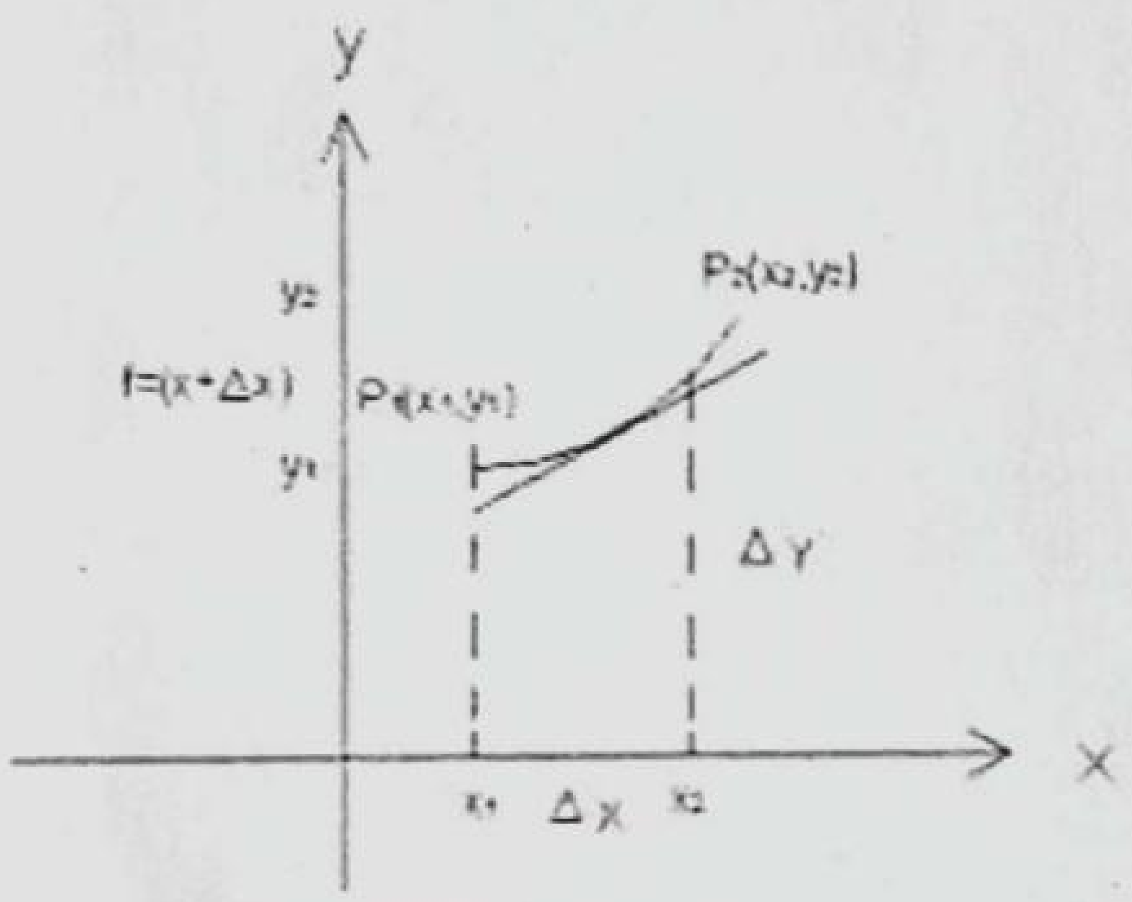
الدالة: هي مجموعة إحداثيات النقاط (x,y) بحيث أن أي تغير يكون في x يحدث في y .

أنواع الدوال : Example :

الدوال الجبرية	$y = x^2 + 2$
الدوال المثلثية	$y = \mathrm{Sin}x + \cos x$
الدوال الآسية	$y = e^{x^2}$
الدوال اللوغارتمية	$y = \mathrm{Ln}\, x^2$
الدوال المركبة	$y = x^2 \mathrm{Sin}x + e^x$

✱ التفاضل (الاشتقاق) :The Derivative

المشتقة : هي ميل المماس لمنحني الدالة أو هو غاية (Limit) معدل التغير لـ y بالنسبة الى المتغير (x) عندما تقترب Δx من الصفر



أيجاد المشتقة :
حسب التعريف
حسب القوانين

قانون أيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

المشتقة $$\boxed{f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ -y \quad = -f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

$$\Delta x \div \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

✎ **Example :(1)**

جد المشتقة حسب التعريف للدالة $y = x$

حسب القوانين

$y = x \quad \Rightarrow y' = 1$

Sol. :

$y = f(x)$

أجعل

$f(x) = x$

$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$

$f(x) = x^2$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x^2 + 2\Delta x.x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x = 2x$$

☆☆ملاحظة:

يرمز للمشتقة بـ y' أو $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$

Example :(2)

$f(x)=\sqrt{x}$

جد المشتقة للدالة بطريقة التعريف :

Sol.:

القانون:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x} \qquad \text{and } f(x)=\sqrt{x}$$

نعوض في القانون :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

نضرب * مرافق البسط ينتج :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}*\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمارين تطبيقية

مشتقة الدالة بطريقة التعريف :

Find the derivative by definition:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$
2) $y=x^2+2x+2$
3) $y=x+5$
4) $y=x^2+8$
5) $y=2\sqrt{x}$
6) $y=3\sqrt{x}+7$

❀❀قوانين مشتقة الدوال الجبرية ❀❀

1) مشتقة الثابت

$$1)\ \frac{d}{dx}(c)=0$$

C= constant

* أي ان مشتقة الثابت تساوي صفر .

Example :(3)

$y=5$

sol. $\frac{d}{dx}(5)=0 \Rightarrow y'=0\ (f'(x)\quad y')$

(2

$$2)\ \frac{d}{dx}(x)=1$$

3) مشتقة ثابت * دالة :

$$3)\ \frac{d}{dx}[c\,f(x)]$$

Example :(4)

$y=3x^2$

sol. $y'=6x$

4) مشتقة دالة مرفوعة الى قوى

$$4)\ \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

Example :(5)

$y=x^3 \qquad \Rightarrow \qquad y'=3x^2$

5) مشتقة جمع او طرح دالتين :

$$5)\ \frac{d}{dx}[f(x)\mp g(x)]=f'(x)\mp g'(x)$$

Example :(6)

$y=f(x)=2x^2+4x+5$

sol. $y'=f'(x)=4x+4$

6) مشتقة حاصل ضرب دالتين :

$$6)\ \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

أي ان مشتقة ضرب دالتين = مشتقة الاول * الثاني + الأول * مشتقة الثاني

Example :(7)

جد المشتقة للمقدار التالي

$$y = x^2\sqrt{4-x}$$

$$sol.\quad y = x^2(4-x)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.(4-x)^{1/2} + x^2.\frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}.-1 \longleftarrow$$

(مشتقة –x   مشتقة داخل القوس)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x.\sqrt{4-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x}}$$

---

7) مشتقة القسمة Division

$$7)\ \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

* أي ان مشتقة القسمة تساوي : مشتقة البسط * المقام مطروحاً منه مشتقة المقام * البسط على مربع المقام

Example :(8)

جد مشتقة الدالة

$$y = \frac{x^2-1}{x}$$

$$sol.\ y' = \frac{(2x)\ .x-(1)\ (x^2-1)}{x^2}$$

$$= \frac{(2x^2 - x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$8)\ \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

أي ان مشتقة القوس يساوي مشتقة القوس * مشتقة داخل القوس

Example :(9)

$$f(x) = (x^4+2)^3$$

$$sol.\ f'(x) = 3(x^4+2)^2.(4x^3)$$

$$= 12x^3(x^4+2)^2$$

Example :(10) Find the derivatives for the following functions:

جد المشتقة للدوال التالية :

$$1)\ y = x^4 + 3x + 5$$

$$sol.\quad y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3 + 0$$

$$\therefore y' = 4x^3 + 3$$

---

2) $y = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2x^5$

sol. $y = 2x^{1/2} + (x^2)^{1/3} + 2x^5$

$y = 2x^{1/2} + x^{2/3} + 2x^5$

$\therefore \quad y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + \frac{2}{3} x^{-1/3} + 10x^4$

$\therefore \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 10x^4$

$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3}$

$= \frac{2-3}{3}$

$= -\frac{1}{3}$

---

3) $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

sol. $y = \sqrt[3]{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x^{-1/2}$

$y' = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{1}{2} x^{-3/2}$

$\therefore \quad y' = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$

$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3}$

$= \frac{2-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{2}$

$= \frac{-1-2}{2}$

$= -\frac{3}{2}$

---

4) $y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{\sqrt{x^3}}$

sol. $y = 3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{-\frac{2}{3}} + 6 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \quad y' = 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 2 \cdot -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + 6 \cdot -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore \quad y' = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{9}{\sqrt[2]{x^5}}$

---

5) $s = (t^2 - 3)^4$

sol. $V = \frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3 \cdot 2t$

$\therefore \frac{ds}{dt} = 8t((t^2 - 3)^3$

$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow a:$ التعجيل

S= المسافة ، t= الزمن ، V = السرعة ، a= التعجيل

---

6) $y=\sqrt{x^2+6x-3}$

sol. $y=(x^2+6x-3)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}(2x+6) \longleftarrow$$ مشتقة داخل القوس

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot 2(x+3)(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-3}}$$

---

* مشتقة حاصل ضرب دالتين

7) $y=(x^2+2)(2x^3-1)^3$

sol. $\frac{dy}{dx}=(x^2+2)\cdot 3(2x^3-1)^2\cdot 6x^2+(2x^3-1)^3\cdot 2x$

$$\therefore y'=18x^2(x^2+2)(2x^3-1)^2+2x(2x^3-1)^3$$

مشتقة القسمة

8) $Z=\frac{2t-3}{3t^2-1}$

sol. $Z'=\frac{2(3t^2-1)-6t(2t-3)}{(3t^2-1)^2}=\frac{6t^2-2-12t^2+18t}{(3t^2-1)^2}$

$$\therefore \quad Z'=\frac{-6t^2+18t-2}{(3t^2-1)^2}$$

---

9) $y=\frac{x^2}{\sqrt{4-2x^2}}$

sol. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4-2x^2}\cdot 2x-x^2\cdot\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -4x}{(\sqrt{4-2x^2})^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\sqrt{4-2x^2}+2x^3(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(4-2x^2)}$$

★★ملاحظة★★ : يمكن حل السؤال اعلاه بطريقة مشتقة حاصل ضرب دالتين :
ترتيب المعادلة كالأتي :

$$y = x^2 (4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot -\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot -4x + (4-2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{(4-2x^2)^3}} + \frac{2x}{\sqrt{4-2x^2}}$$

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) Chain Rule :

اذا كانت

$$y = u^2 - 1 \qquad ....(1)$$

$$u = 3x^2 - x \qquad ....(2)$$

نوجد مشتقة الاول (1)

نوجد مشتقة الثاني (2)ثم نوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ كالاتي:

قاعدة سلسلة واحدة Chain Rule

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مشتقة معادلة:-

$$\frac{dy}{du} = 2u \qquad ....(1)$$

$$\frac{du}{dx} = 6x - 1 \qquad ....(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2u(6x-1) \qquad ....(3)$$

نعوض عن قيمة u من معادلة (2) في معادلة (3) يتبع :

$$y' = 2 \cdot [(3x^2 - x)(6x-1)]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 3x^2 - 6x^2 + x]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 9x^2 + x]$$

$$= 36x^3 - 18x^2 + 2x$$

---

2)if: $y = x^2 - 4x$

$x = \sqrt{2t^2 + 1}$; Find $\frac{dy}{dt}$

sol. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$y = x^2 - 4x \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2\sqrt{2t^2+1} - 4) \cdot 2t}{\sqrt{2t^2+1}}$$

$x = (2t^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \therefore \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4t$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dt} = (2x-4) \cdot \dfrac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4t$

$\therefore \quad y' = (2x-4)(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t$

---

3) $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ and $u = \sqrt[3]{x^2+2}$

Find: $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\therefore \dfrac{dy}{du} = \dfrac{(u^2+1) \cdot 2u - (u^2-1) \cdot 2u}{(u^2+1)^2} = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2}$

$u = \sqrt[3]{x^2+2} = (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(u^2+1) \cdot 2u - (u^2-1) \cdot 2u}{(u^2+1)^2} \cdot \dfrac{2}{3}x(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{u}{(u^2+1)^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}} = \dfrac{8x\sqrt[3]{(x^2+2)}}{3(\sqrt[3]{(x^2+2)^2}+1)^2} * \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$

---

4) $y = u^3 + u$

$u = x^2 + 2x$

Find $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{du} = 3u^2 + 1$ and $\dfrac{du}{dx} = 2x+2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (3u^2+1)\,(2x+2)$

$= (3(x^2+2x)^2+1)\,(2x+2)$

تمارين تطبيقية:

Find: $\frac{dy}{dx}$

1) $y = \sqrt{2x} - \sqrt{x}$

2) $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

3) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

4) $y = \frac{u-1}{u+1}$ and $x = \sqrt{u}$

5) $y = (\frac{x^3-1}{x^2+1})^4$

6) $y = u^3 + u$ $\quad\quad u = x^2 + 2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2 + 1$ $\quad\quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 2$

7) $y = (1+u^2)^3$ $\quad , x = u^2 \quad , x = 1$ $\quad$ Ans : sol=12

مشتقة الدالة الضمنية :

هي مشتقة كل متغير ، وكل مشتقة بالنسبة لـ y تكون مضروبة بـ ' y او $\frac{dy}{dx}$

Example:(1) *Find* : $\frac{dy}{dx}$

تفيد في حل المعادلات التفاضلية

1) $xy^2 + x^2y = 1$

sol. $x \cdot 2y \cdot y' + y^2 \cdot 1 + x^2 \cdot y' + y \cdot 2x = 0$

$(2xy + x^2)\, y' + (y^2 + 2xy) = 0$

$(2xy + x^2)\, y' = -(y^2 + 2xy)$

$\therefore y' = \frac{-(y^2+2xy)}{(2xy+x^2)}$

Example :(2) Find $\frac{dy}{dx}$ (y')

2) $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

sol. $x^2 \cdot y' + y \cdot 2x - (x \cdot 2y \cdot y' + y^2 \cdot 1) + 2x + 2y y' = 0$

$x^2 \cdot y' + 2xy - 2xy \cdot y' - y^2 + 2x + 2y y' = 0$

$(x^2 - 2xy + 2y)\ y' = y^2 - 2xy - 2x$

$\therefore y' = \frac{(y^2 - 2xy - 2x)}{(x^2 - 2xy + 2y)}$

Example :(3) Find y' , y''

3) $x^2 - xy + y^2 = 3$

sol. $2x - (x \cdot y' + y \cdot 1) + 2y \cdot y' = 0$

$y'(2y - x) + (2x - y) = 0$

$\therefore y' = \frac{-2x + y}{2y - x}$

$y'' = \frac{(2y - x)(-2 + y') - (-2x + y)(2y' - 1)}{(2y - x)^2}$

(H.W) تمارين تطبيقية:

1) $xy^3 + x^3y = 2$ Find: y' , y''

2) $x^2y^2 + 5xy + y^2 = 5$

3) $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^2 = 0$

4) $y^3x^2 + x^3y + xy = 1$

5) $x^2y^4 + x^4 \cdot y^2 + x^2 \cdot y = 4$

6) $y = e^{\ln y^2} + y \ln x^2$

7) $\text{Cos}y - \text{Sin}^3x^2 - y^3 - x^2 = 6$

8) $\text{Cos}^2y - \frac{\sqrt{X}}{2\text{Sin}\sqrt{x}} = \frac{1}{y} + \tan^{-1}x$

9) $\tan^3y - y\text{Cos}x = \frac{1}{2}\text{Sin}^2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

10) $2 + \ln y = 2^{\ln x} + e^{5x}$

Derivative of Trigonometric function مشتقات الدوال المثلثية

بالانكليزي

ملاحظة:-

$\sin x =$ جا س

$\cos x =$ جتا س

$\tan x =$ ظا س

$\cot x =$ ظتا س

$\sec x =$ قا س

$\csc x =$ قتا س

* اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى المتغير x فإن

الدالة المثلثية	مشتقة الدالة المثلثية
① $y = \sin u$	$y' = \cos u * u'$
② $y = \cos u$	$y' = -\sin u * u'$
③ $y = \tan u$	$y' = \sec^2 u * u'$
④ $y = \cot u$	$y' = -\csc^2 u * u'$
⑤ $y = \sec u$	$y' = \sec u \tan u * u'$
⑥ $y = \csc u$	$y' = -\csc u \cot u * u'$

ملاحظة:- u' تمثل مشتقة زاوية النسبة المثلثية

أمثلة

Examples: Find $\frac{dy}{dx}$ if

① $y = \sin(x^3+6)$

② $y = \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$

③ $y = \tan(\sin x^4)$

④ $y = \cos^3(1-2x^2)$

الحل

solution:

① $y' = \cos(x^3+6)\; 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3+6)$

② $y' = -\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\; \frac{2}{3} = \frac{-2}{3} \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

$$y' = \sec^2(\sin x^4)\cos x^4 \; 4x^3 = 4x^3\cos x^4 \sec^2(\sin x^4)$$

$$y = [\cos(1-2x^2)]^3$$

$$y' = 3[\cos(1-2x^2)]^2 \cdot -\sin(1-2x^2)\cdot(-4x)$$

$$= 12x\sin(1-2x^2)\cos^2(1-2x^2)$$

---

amples:- Find y' if

① $y = \sec\frac{x}{3}\tan 3x$ ② $y = \sqrt[3]{\csc x}$

③ $y = \dfrac{\sin x^2}{\cos x}$ ④ $y = \sqrt{x}\cot 2x$

olution:-

1) $y' = \sec\frac{x}{3}\sec^2 3x \cdot 3 + \tan 3x \sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$y' = 3\sec\frac{x}{3}\sec^2 3x + \frac{1}{3}\tan 3x\tan\frac{x}{3}\sec\frac{x}{3}$

$y = (\csc x)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}(\csc x)^{-\frac{2}{3}}(-\csc x\cot x)$

$y' = \frac{-1}{3}(\csc x)^{\frac{1}{3}}\cot x$

$y' = \frac{-1}{3}\cot x\sqrt[3]{\csc x}$

③ $y' = \dfrac{\cos x \cos x^2 (2x) - \sin x^2 (-\sin x) * 1}{(\cos x)^2}$

$y' = \dfrac{2x \cos x \cos x^2 + \sin x \sin x^2}{\cos^2 x}$

④ $y = x^{\frac{1}{2}} \cot 2x$

$y' = x^{\frac{1}{2}} (-\csc^2 2x * 2) + \cot 2x \ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= -2\sqrt{x} \ \csc^2 2x + \dfrac{\cot 2x}{2\sqrt{x}}$

تمارين

① جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية

① $y = x^2 \cot x$

② $y = 2 \sin \frac{x}{2} - x^2 \cos x$

③ $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

④ $y = \sin(\cos x) - \tan(\sin x)$

⑤ $y = x^3 \sec \frac{x}{5}$

② اذا كانت $y = 3\sin(2x+8)$ برهن أن $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

$y = 3\sin(2x+8)$ $\quad y' = 3\cos(2x+8) \cdot 2$

$y' = 6\cos(2x+8)$ $\quad y'' = -6\sin(2x+8) \cdot 2$

$y'' = -12 \sin(2x+8)$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = -12\sin(2x+8) + 4(3\sin(2x+8))$

$= -12 \sin(2x+8) + 12\sin(2x+8)$ ③

$= 0$

2

The Exponential Function الدوال الأسية

هناك نوعان من الدوال الأسية هما:-

① الدالة الأسية e^{x}: وتعرف بأنها الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ ويرمز لها بالرمز e^{x} أو $Exp(x)$ أي أن

$$\boxed{y = e^{x} \Leftrightarrow x = \ln y}$$

$e^{x} = \ln^{-1}(x)$ where $e \cong 2.718$

خواص الدالة الأسية e^{x}

① $\ln e = 1$

② $\ln e^{x} = x$

③ $e^{\ln x} = x$

④ $e^{x} e^{y} = e^{x+y}$

⑤ $\dfrac{e^{x}}{e^{y}} = e^{x-y}$

② الدالة الأسية a^{x}: تسمى الدالة الأسية ذات الأساس الثابتة a بالدالة الأسية للأساس a ونرمز لها بالرمز a^{x} وتعرف كما يلي

$$\boxed{y = a^{x} = e^{x \ln a}}$$

Derivative of Exponentiol Function : مشتقة الدالة الأسية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x فإن
مشتقة الدالة الأسية هي

الدالة الأسية	مشتقتها
① $y = e^{u}$ $\Longrightarrow$	$y' = e^{u} \cdot u'$
② $y = a^{u}$ $\Longrightarrow$	$y' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$

Example:

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال

① $y = 4e^{2x+1}$ ② $y = \frac{1}{8} e^{\tan x^2}$

③ $y = 2^{3x-5}$ ④ $y = 5^{\sec x}$

⑤ $y = \sqrt{e^{x}} \ln x^3$ ⑤ $y = \frac{\ln^2 x}{e^{x}}$

Solution:

① $y' = 4e^{2x+1} * 2 = 8e^{2x+1}$

② $y' = \frac{1}{8} e^{\tan x^2} \sec^2 x^2 \, 2x = \frac{1}{4} x \sec^2 x^2 \, e^{\tan x^2}$

③ $y' = 2^{3x-5} \cdot \ln 2 \cdot 3 = 3\ln 2 \; 2^{3x-5}$

④ $y' = 5^{\sec x} \ln 5 \sec x \tan x = \ln 5 \; 5^{\sec x} \sec x \tan x$

(5) $y = e^{x/2} \ln x^3$

$\Rightarrow y' = e^{x/2} \dfrac{1}{x^3} 3x^2 + \ln x^3 \, e^{x/2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$y' = \dfrac{3}{x} e^{x/2} + \dfrac{1}{2} e^{x/2} \ln x^3 = e^{x/2}\left[\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2}\ln x^3\right]$

(6) $y = e^{-x} \ln^2 x = e^{-x} (\ln x)^2$

$y' = e^{-x}\, 2(\ln x)^1 \dfrac{1}{x} + (\ln x)^2 e^{-x} (-1)$

$= \dfrac{2}{x} \ln x \, e^{-x} - e^{-x} \ln^2 x$

$= \ln x \, e^{-x} \left[\dfrac{2}{x} - \ln x\right]$

تمارين

① جد $\dfrac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية

(1) $y = e^{1/x}$

(2) $y = 8^{\sin 2x}$

(3) $y = 3^{-2x} x^3$

(4) $y = e^{\cot \frac{x}{7}} + e^{x^4} \ln x^2$

(5) $y = \ln (x+3)^2$

(6) $y = \ln^2 (x+3)$

② اذا كان $y = \tan x$ برهن أن $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

③ اذا كان $y = x \sin x$ برهن أن

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2\cos x$$

Derivative of Implicit Function مشتقة الدالة الضمنية

Example: Find $\acute{y}$ if $x^4-3xy^2+2y^3=0$
مثال

solution: $4x^3-3(x\,2y\acute{y}+y^2)+6y^2\acute{y}=0$

$$4x^3-6xy\acute{y}-3y^2+6y^2\acute{y}=0$$

$$6y^2\acute{y}-6xy\acute{y}=3y^2-4x^3$$

$$\acute{y}(6y^2-6xy)=3y^2-4x^3$$

$\therefore\ \acute{y}=\dfrac{3y^2-4x^3}{6y^2-6xy}$ ، at $(-1,2)$

أي عند النقطة $(-1,2)$

$$\acute{y}=\frac{3(2)^2-4(-1)^3}{6(2)^2-6(-1)(2)}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

Example: Find $\frac{dy}{dx}$ if $3x^2=e^{y^2}-\tan xy$

solution

$$6x=e^{y^2}2y\acute{y}-\sec^2 xy\,(x\acute{y}+y)$$

$$6x=2y\acute{y}e^{y^2}-x\acute{y}\sec^2 xy-y\sec^2 xy$$

$$\acute{y}(2ye^{y^2}-x\sec^2 xy)=6x+y\sec^2 xy$$

$$\therefore\ \acute{y}=\frac{6x+y\sec^2 xy}{2ye^{y^2}-x\sec^2 xy}$$

Example: إذا كان $x^2 - y^2 - k^2 = 0$ برهن أن

$y'' = \frac{-k^2}{y^3}$ حيث k كمية ثابتة

solution:

$$x^2 - y^2 = k^2$$

$$2x - 2y y' = 0$$

$$-2y y' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{y - x y'}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{y^2 - x^2}{y}}{y^2}$$

$$y'' = \frac{y^2 - x^2}{y} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-(x^2 - y^2)}{y^3} = \frac{-k^2}{y^3}$$

تمارين

① جد y' للدوال الآتية

① $\sin xy = \cos xy + y^2$

② $y = \sin(\cos x) + \tan(\sin x)$

③ $y^3 + y^2 x^2 = 8$

② إذا كان $x^3 - y^3 = a^3$ برهن أن

$$y'' = \frac{-2a^3 x}{y^5}$$

Logarithms Function الدوال اللوغاريتمية

هناك نوعان من الدوال اللوغاريتمية

1- دالة اللوغاريتم الاعتيادي :

ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $a \neq 1$ ، ومتغير حقيقي موجب مثل x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الاساس a هي الدالة التي تكون على الشكل الآتي

$$\boxed{y = \log_a x \iff x = a^y}$$

خواص دالة اللوغاريتم الاعتيادي

1. $\log_a x^b = b \log_a x$
2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a x = \frac{\ln x}{\operatorname{Ln} a}$, if $a \neq 1$, $x > 0$

2- دالة اللوغاريتم الطبيعي :

وهي دالة اللوغاريتم الاعتيادي ذو الاساس e حيث $e \cong 2.718$ وتعرف كالاتي

$$y = \operatorname{Ln} x = \log_e x$$

Derivative of logarithms Function مشتقة الدوال اللوغاريتمية

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى المتغير x فان

الدالة اللوغاريتمية	المشتقة
① $y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} * u'$
② $y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{\ln a \, u} * u'$

Examples Find y' if

① $y = \ln(4x^3+6)$ ② $y = \ln(\sin x^2)$

③ $y = \log_5(\tan 3x)$ ④ $y = \log_e(\cos x)$

⑤ $y = \ln^2 6x$ ⑥ $y = x^5 \ln^3(x-1)$

solution:

① $y' = \frac{1}{4x^3+6} \cdot (12x^2) = \frac{12x^2}{4x^3+6}$

② $y' = \frac{1}{\sin x^2} \cos x^2 * 2x = \frac{2x \cos x^2}{\sin x^2} = 2x \cot x^2$

③ $y' = \frac{1}{\ln 5 \tan 3x} \sec^2 3x * (3) = \frac{3 \sec^2 3x}{\ln 5 \tan 3x}$

④ $y' = \frac{1}{\ln e \cos x}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

⑤ $y = [\ln 6x]^2$

$y' = 2[\ln 6x]^1 \frac{1}{6x} (6) = \frac{2 \ln 6x}{x}$

Applications of differentiation
تطبيقات التفاضل

أولاً :- المسافة والسرعة والتعجيل :-

عندما يتحرك جسم على خط مستقيم فأن قانون الحركة يُعطى بالمعادلة الآتية :

$$S = f(t)$$

حيث S المسافة [distance] مقدرة بالأمتار meter

t هو الزمن مقدر بالثانية second

السرعة اللحظية (Velocity)

هي معدل تغير المسافة بالنسبة الى الزمن أو هي المشتقة الأولى لدالة المسافة بالنسبة للزمن ويرمز لها بالرمز V أي أن

$$\boxed{V = \frac{ds}{dt} \quad m/sec}$$

التعجيل Acceleration :-

هو معدل تغير السرعة بالنسبة الى الزمن أو هو المشتقة الأولى لدالة السرعة بالنسبة للزمن ويرمز له بالرمز a

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} \quad m/sec^2}$$

مثال ①: اذا كانت $S = t^3 + 2t^2 - 3t$ هو قانون حركة جسم في خط مستقيم حيث S مقاسة بالأمتار جد السرعة والتعجيل في نهاية [2 sec] من بدء الحركة

Solution:-

$$V = \frac{dS}{dt} = 3t^2 + 4t - 3$$

$\bar{V} = 3(2)^2 + 4(2) - 3$ عندما $t = 2$ sec

$$\Rightarrow V = 12 + 8 - 3$$
$$= 20 - 3$$
$$= 17 \ m/sec$$

التعجيل a

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

عندما $t = 2$ sec

$$\Rightarrow a = 12 + 4 = 16 \ m/sec^2$$

مثال ②:- يتحرك جسم على خط مستقيم وفق القاعدة $S = \sqrt{2t^2 + 18}$ أحسب بعده عن نقطة بدء الحركة عندما تكون سرعته تساوي 1 m/sec

Solution:-

$$S = (2t^2 + 18)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}(2t^2 + 18)^{-\frac{1}{2}} \cancel{4}^{2} t$$

$$V = \frac{2t}{\sqrt{2t^2 + 18}}$$

$$\frac{2t}{\sqrt{2t^2 + 18}} = 1$$

Scanned by TapScanner

$\Rightarrow \quad 2t = \sqrt{2t^2+18}$ حاصل ضرب الوسطين = الطرفين

$4t^2 = 2t^2 + 18$ بتربيع الطرفين

$2t^2 = 18$

$t^2 = \frac{18}{2} = 9 \quad t = \sqrt{9}$

$t = \pm 3$

$\therefore t = 3 \text{ sec}$

$\therefore \quad s = \sqrt{2(3)^2 + 18} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36}$
$= 6 \, m$

مثال (3): إذا كانت حركة جسم تعطى حسب العلاقة $s = t^3 - 2t^2 + 3t$

جد تعجيل الجسم في اللحظة التي تصل سرعته فيها الى $7 \, m/sec$ ثم احسب بعده عن نقطة بدء الحركة في هذه اللحظة.

solution:- $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 4t + 3$

$v = 7$ ∵

$\Rightarrow 3t^2 - 4t + 3 = 7$

$3t^2 - 4t - 4 = 0$

$(3t+2)(t-2) = 0$

either لما $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ sec}$

or او $3t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2}{3}$ يهمل

$a = 6t - 4$

عندما $t = 2$

$\Rightarrow a = 12 - 4 = 8 \, m/sec^2$

$\therefore s = (2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) = 8 - 8 + 6 = 6 \, m$

ثانياً- إيجاد معادلة المماس والعمودي على منحني.

لتكن $y = f(x)$ دالة معينة

وليكن m يمثل ميل منحني هذه الدالة فأن

$$m = \frac{dy}{dx}$$

ملاحظات :-

① ميل المستقيم الذي يمر بنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)

هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

② ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

③ ميل المماس لمنحني الدالة في نقطة معينه يساوي ميل منحني الدالة في هذه النقطة .

⊛ معادلة المماس الذي ميله m والمار بالنقطة (x_1, y_1)

هي

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

⊛ معادلة المستقيم العمودي على المماس في النقطة (x_1, y_1)

هي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

⊛ ميل المستقيم الذي معادلته هي $Ax + by + c = 0$

هو

$$\boxed{m = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}} \Longleftarrow m = \frac{-A}{b}$$

(5)

مثال / جد معادلة المماس والمستقيم العمودي عليه للمنحني
$y = x^2 + 4$ عند النقطة $(2,4)$

solution :- $m = \frac{dy}{dx} = 2x$

∴ ميل المماس عند النقطة $(2,4)$ هو

$m = 2(2) = 4$

معادلة المماس هي

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 4(x - 2)$

$y - 4 = 4x - 8$

$4x - y - 4 = 0$

معادلة المستقيم العمودي هي

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{-1}{4}(x - 2)$

$4y - 16 = -x + 2$

$x + 4y - 18 = 0$

مثال / جد معادلة المماس لمنحني الدالة $y = x^3 - 6x^2 + 9$ الذي ميله يساوي (-12) .

solution :-

$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x$

$m = -12$ ∴

$\Rightarrow 3x^2 - 12x = -12$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ [بالقسمة على 3]

$(x-2)(x-2) = 0$

either $x - 2 = 0$

$x = 2$

(6)

لإيجاد قيمة y نعوض عن $x=2$ في منحني الدالة الأصلية

$$y=(2)^3-6(2)^2+9=8-24+9$$
$$=-7$$

∴ نقطة التماس $(2,-7)$

∴ معادلة المماس هي

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+7=-12(x-2)$$
$$12x+y-17=0$$

مثال/ أوجد احداثيات النقط على المنحني $y=\frac{x^2-3}{x+2}$ التي تكون المماسات عندها موازية للمحور x.

solution:-

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)2x-(x^2-3)*1}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

∵ عندما يكون المماس موازياً للمحور x فإن ميله يساوي صفر

أي أن

$$m=0$$
$$\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0$$
$$x^2+4x+3=0 \Longrightarrow (x+1)(x+3)=0$$

إما either $x+1=0$
$x=-1$

أو or $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

$$y=\frac{(-1)^2-3}{-1+2}=-2 \Longleftarrow$$ عندما $x=-1$

$$y=\frac{(-3)^2-3}{-3+2}=-6 \Longleftarrow$$ عندما $x=-3$

∴ النقطتان هما $(-1,-2)$ و $(-3,-6)$

6

(7)

ل/ جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=25$ عند النقطة $(-3\,,\,4)$

Solution:

$$2x+2yy'=0$$

$$2yy'=-2x \Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow m=y'=\frac{-x}{y}=\frac{-(-3)}{4}=\frac{3}{4}$$

∴ معادلة المماس للدائرة هي

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{3}{4}(x+3)$$

$$4y-16=3x+9$$

$$\Rightarrow 3x-4y+25=0$$

مثال/ في أي نقطة يكون المماس للمنحني $x^2+y^2=25$ يوازي المستقيم $2x-y=5$

Solution:

نفرض نقطة التماس هي $(a\,,\,b)$

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow m=\frac{-x}{y}=\frac{-a}{b}$$ ميل المنحني كذلك ميل المماس

$$m=\frac{-2}{-1}=2$$ ميل المستقيم هو

∵ المماس // المستقيم ⟸ ميل المماس = ميل المستقيم

$$\Rightarrow \frac{-a}{b}=2 \Rightarrow a=-2b \longrightarrow (1)$$

∵ نقطة التماس تنتمي للمنحني فهي تحقق معادلته

$$\Rightarrow a^2+b^2=5 \longrightarrow (2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$\Rightarrow 4b^2+b^2=5 \Rightarrow 5b^2=5 \Rightarrow b=\pm 1$$

النقطتان هما $(2,-1)$

تمارين

1) يتحرك جسم رأسياً الى أعلى فيقطع كم من الأمتار في زمن قدره t من الثواني. بحيث كانت حركته تخضع للقانون $ف = t^2 - 18t + 88$ ما الزمن الذي يمضي حتى يصل الجسم الى أقصى ارتفاع له وما هو ارتفاعه عن نقطة بدء الحركة.

2) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة التالية $ف = t^3 - 4t^2 - 3t$ جد التعجيل a لهذا الجسم في اللحظة التي تصبح سرعته فيها صفر.

3) جد احداثيات النقط على المنحني $ص = 2x^3 - 6x^2 + 6x$ التي يكون عندها المماس موازياً للمحور x ثم جد معادلة هذا المماس.

4) جد معادلة المماس للمنحني $ص = x^3 - 3x^2 + 1$ الذي ميله يساوي -3

5) جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $ف = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5$ حيث ف الازاحة بالأمتار، t الزمن بالثواني جد السرعة عندما التعجيل يساوي صفر.

6) لتكن $v(t)$ سم/ثا سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم حيث $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ جد

① سرعة الجسم عندما $t = 2$

② السرعة عندما يكون التعجيل يساوي صفراً.