محاضرة رقم (5)

Derivatives: المشتقات

تعريف:- اذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى المتغير (x) فان رمز المشتقة لها هو $\left(y' \text{ or } \frac{dy}{dx}\right)$ ورمز المشتقة الثانية لها هو $\left(y'' \text{ or } \frac{d^2y}{dx^2}\right)$

قواعد الاشتقاق

القاعدة الأولى :- مشتقة الدالة الثابتة (مشتقة الثابت =صفر).

$F(x) = a$

$where: -$

$a = const.$

$F(x) = a \Rightarrow F'(x) = 0$

Examples:-

1) $F(x) = 4 \Rightarrow F'(x) = 0$

2) $F(x) = 7 \Rightarrow F'(x) = 0$

3) $F(x) = \frac{1}{9} \Rightarrow F'(x) = 0$

4) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow F'(x) = 0$

5) $F(x) = -13 \Rightarrow F'(x) = 0$

القاعدة الثانية :- مشتقة الدالة x^n .

$$F(x) = x^n \Rightarrow F'(x) = nx^{n-1}$$

Examples:-

1) $y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$

2) $y = x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3$

3) $y = x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x^{-2-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3}$

4) $y = \frac{1}{x^4} \Rightarrow y = x^{-4} \Rightarrow y' = -4x^{-4-1} \Rightarrow y' = -4x^{-5} \Rightarrow y' = \frac{-4}{x^5}$

5) $y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

6) $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}}$

$$y' = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3 * \sqrt[3]{x^2}}$$

القاعدة الثالثة :- مشتقة الدالة ax^n .

$$F(x) = ax^n \Rightarrow F'(x) = a * nx^{n-1}$$

$where :-$

$a = constant$

Examples:-

$$1)\ y = 3x^4 \Rightarrow y' = 3 * 4x^{4-1} \Rightarrow y' = 12x^3$$

$$2)\ y = \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow y' = \frac{1}{6} * 3x^{3-1} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cancel{6}^{2}} * \cancel{3}\, x^{3-1}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2$$

$$3)\ y = 4 * \sqrt{x^5} \Rightarrow y = 4 * x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = 4 * \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}$$

$$y' = \cancel{4}^{2} * \frac{5}{\cancel{2}}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = 10x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 10 * \sqrt{x^3}$$

$$4)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow y = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

القاعدة الرابعة :- جمع او طرح عدد من الدوال.

Examples:-

1) $y = x^3 - 5x^2 + 10 \Rightarrow y' = 3x^2 - 10x + 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 10x$

2) $y = 3x^2 + 5x^3 + 30x^2 + 20$

$y' = 6x + 15x^2 + 60x + 0 \Rightarrow y' = 6x + 15x^2 + 60x$

3) $y = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x^2}{5} - \frac{1}{6}$

$y = \frac{3}{2}x^{-2} + \frac{5}{3}x^2 - \frac{7}{5}x^2 - \frac{1}{6}$

$y' = \frac{3}{2} * (-2)x^{-2-1} + \frac{5}{3} * (2)x^{2-1} - \frac{7}{5} * (2)x^{2-1} - 0$

$y' = -3x^{-3} + \frac{10}{3}x - \frac{14}{5}x$

القاعدة الخامسة :- مشتقة حاصل ضرب دالتين.

(الأولى * مشتقة الدالة الثانية +الثانية *مشتقة الدالة الأولى)

Examples:-

1) $y = (3x^3 - 4) * (2x^2 + 3)$

$y' = (3x^3 - 4) * 4x + (2x^2 + 3) * 9x^2$

$y' = 12x^4 - 16x + 18x^4 + 27x^2$

$y' = 30x^4 + 27x^2 - 16x$

2) $y = (2x^2 + 1) * (2 + 3x^3)$

$y' = (2x^2 + 1) * 9x^2 + (2 + 3x^3) * 4x$

$y' = 18x^4 + 9x^2 + 8x + 12x^4$

$y' = 30x^4 + 9x^2 + 8x$

القاعدة السادسة :- مشتقة حاصل قسمة دالتين.

المقام *مشتقة البسط –البسط *مشتقة المقام

(المقام)^2 تربيع

Examples:-

$$1)\ y = \frac{x^2 - 1}{2 + x^3} \Rightarrow y' = \frac{(2 + x^3) * 2x - (x^2 - 1) * 3x^2}{(2 + x^3)^2}$$

$$y' = \frac{4x + 2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{(2 + x^3)^2} \Rightarrow y' = \frac{-x^4 + 3x^2 + 4x}{(2 + x^3)^2}$$

$$y = \frac{2x^2 + 3}{3x^3 + 4} \Rightarrow y' = \frac{(3x^3 + 4) * 4x - (2x^2 + 3) * 9x^2}{(3x^3 + 4)^2}$$

$$y' = \frac{12x^4 + 16x - 18x^4 - 27x^2}{(3x^3 + 4)^2} \Rightarrow y' = \frac{-6x^4 - 27x^2 + 16x}{(3x^3 + 4)^2}$$

القاعدة السابعة :- قوس مرفوع الى قوة .

Examples:-

$$y = (x^2 + 2x)^3 \Rightarrow y' = 3 * (x^2 + 2x)^{3-1} * (2x + 2)$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}-1} * (2x)$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{\frac{-1}{2}} * (2x)$$

$$y' = x\,(x^2 - 1)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{x}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$