محاضرة رقم (4)

الغاية (Limit):-

اذا كانت x تقترب من a وكانت قيمة الدالة f(x) تقترب من c نسمي c هي غاية الدالة f(x) عندما x تقترب من a .

أي ان:-

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

قواعد الغاية

1- القاعدة الاولى :- غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسة

أمثله:-

$$1)\ \lim_{x \to -1} 6 = 6$$

$$2)\ \lim_{x \to 3} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

2- القاعدة الثانية :- غاية الدالة كثيرة الحدود= تعويض مباشر

أمثلة:-

$$1)\ \lim_{x \to -1} 3x^2 + 6x + 8$$

$$= 3(-1)^2 + 6(-1) + 8$$

$$= 3 - 6 + 8$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

2) $\lim_{x \to 2} 2x + 16$

$= 2(2) + 16$

$= 4 + 16$

$= 20$

3- **القاعدة الثالثة :- غاية الدالة الجذرية ذات الدليل الزوجي تدخل الغاية تحت الجذر بشرط ان القيمة التي تحت الجذر اكبر او تساوي صفر.**

امثلة:-

1) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3x + 6}$

$= \sqrt{\lim_{x \to 1} 3x + 6}$

$= \sqrt{3(1) + 6}$

$= \sqrt{3 + 6} \Rightarrow \sqrt{9} = 3$

2) $\lim_{x \to -1} \sqrt{2x^2 + 8x + 10}$

$= \sqrt{\lim_{x \to -1} 2x^2 + 8x + 10}$

$= \sqrt{2(-1)^2 + 8(-1) + 10}$

$= \sqrt{2 - 8 + 10}$

$= \sqrt{2 + 2} \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

4- القاعدة الرابعة :- غاية الدالة الكسرية

في الدالة الكسرية هناك حالتان :-

أ- الحالة الاولى :- المقام عند التعويض المباشر يجب ان لا يساوي صفر ففي هذه الحالة نعوض تعويض مباشر.

<u>أمثلة:-</u>

$$1)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+3}$$

$$= \frac{(2)^2+1}{2+3} \Rightarrow \frac{4+1}{2+3}$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4+1}{x+1}$$

$$= \frac{(1)^4+1}{1+1} \Rightarrow \frac{1+1}{1+1}$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3}{x+3}$$

$$= \frac{(3)^2+3}{3+3} \Rightarrow \frac{9+3}{6} = \frac{12}{6}$$

$$= 2$$

ب- المقام عند التعويض المباشر يساوي صفر.

في هذه الحالة لا يمكن لنا التعويض المباشر لذلك يجب الذهاب الى طرق التحليل والاختصارات.

أمثلة:-

$$1)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} \Rightarrow \lim_{x \to 1} (x+1)$$

$$\Rightarrow 1+1=2$$

$$2)\ \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$\lim_{x \to 5} = \frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{(x-5)}} \Rightarrow \lim_{x \to 5} (x+5)$$

$$\Rightarrow 5+5=10$$

$$3)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}=\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{\left(x-2\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}=\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)}{\cancel{\left(x-2\right)}}$$

$$\lim_{x\to 2}=\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)$$

$$=(2+2)((2)^2+4)$$

$$\Rightarrow 4*8=32$$

$$4)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}=\frac{\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right)$$

$$=((3)^2+3(3)+9)$$

$$=9+9+9$$

$$=27$$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$

$$\lim_{x \to 1} = \frac{(x+4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} = \frac{(x+4)}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+4)}{(1+1)} = \frac{5}{2}$$

6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

$$\lim_{x \to 3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$\lim_{x \to 3} = \frac{(x+1)}{(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{(3+1)}{(3+3)} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}^{3}} = \frac{2}{3}$$

$$7)\ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)} * (\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$8)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1) * (\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\mathrm{x}-1)}\,(\mathrm{x}+1) * (\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$\lim_{x \to 1} (\mathrm{x}+1) * (\sqrt{x}+1)$$

$$= (1+1) * (\sqrt{1}+1) \Rightarrow (1+1) * (1+1)$$

$$= 2 * 2 = 4$$