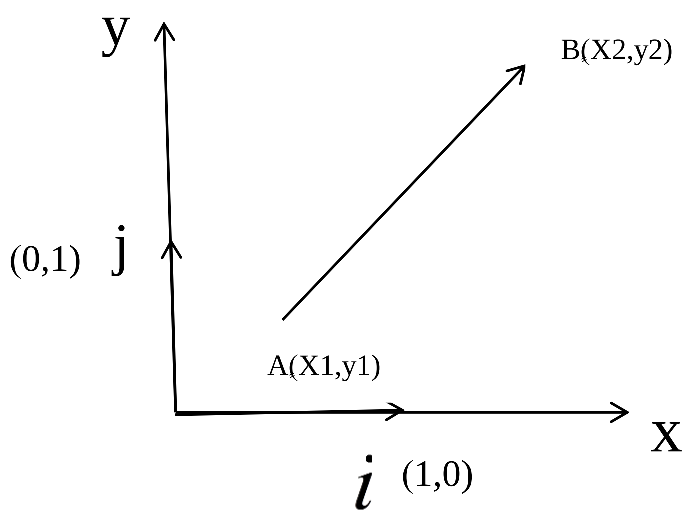
محاضرة رقم (3)

المتجهات (vectors):-

- **الكميات العددية والكميات الاتجاهية:-**

يوجد بعض الكميات الفيزيائية التي يمكن معرفتها من خلال ذكر مقدارها فقط مثل **الكتلة والحجم ودرجة الحرارة**. وهناك كميات اخرى يذكر مقدارها واتجاهها مثل **القوة والسرعة والإزاحة** تسمى هذه الكميات بالكميات الاتجاهية.

***المتجه:-** هو كمية لها مقدار واتجاه ويعرف بأنه جزء من خط المستقيم ويرمز له بالحرف وفوقة سهم مثل $\vec{B},\vec{A}$ ويرمز لطول المتجه $\vec{A}$ بالرمز $|\vec{A}|$



تعتبر المتجهات من نقطة الاصل الى النقاط (0,1) ,(1,0) متجهات وحدة ويرمز لها بالرمز $j\,,i$ على التوالي أي ان

$i = (1,0)$ **متجه وحدة بالاتجاه الموجب للمحور (x).**

$j = (0,1)$ **متجه وحدة بالاتجاه الموجب للمحور (y).**

المتجه $\overline{AB}$ اعلاه يمكن التعبير عنه بطريقتين :-

قانون ايجاد وحدة المتجه $\vec{u}_{\overline{mn}} = \dfrac{\overrightarrow{mn}}{|mn|}$

1- $\overrightarrow{AB} = (a,b)$

2- $AB = ai + bj$

حيث

$a = x_2 - x_1$

$b = y_2 - y_1$

يمكننا ايجاد طول المتجه من القانون التالي:-

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Example(1)</u> :- Find the vector from the point **m**(-2,3) to the point **n**(1,-3) then find the length of this vector?

<u>Solution:-</u>

$\overrightarrow{mn} = ai + bj$

$a = x_2 - x_1 = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

$b = y_2 - y_1 = -3 - 3 = -6$

$\overrightarrow{mn} = 3i - 6j$

$\vec{u}_{\overline{mn}} = \dfrac{\overrightarrow{mn}}{|mn|}$

$|\overrightarrow{mn}| = \sqrt{(3)^2 i + (-6)^2 j}$

$|\overrightarrow{mn}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

$3\sqrt{5}$

Example(2) :- Find the vector from the point **A**(2,4,-1) to the point (-3,0,5) then find the length of this vector?

Solution:-

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3-2)\vec{i} + (0-4)\,\vec{j} + (5-(-1))\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3-2)\vec{i} + (0-4)\,\vec{j} + (5+1)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = -5\vec{i} - 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{\overline{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$$

- ملاحظة لإيجاد طول المتجه نقوم بتربيع معامل كل من (i, j, k) .

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2\vec{i} + (y_2 - y_1)^2\,\vec{j} + (z_2 - z_1)^2\,\vec{k}}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2\vec{i} + (-4)^2\,\vec{j} + (6)^2\,\vec{k}}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (6)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+16+36}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{77}$$

$$\vec{u}_{\overline{AB}} = \frac{-5\vec{i} - 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}}{\sqrt{77}}$$

مثال:- اوجد المتجه $(\overline{Po})$ **اذا كانت النقطة (o) تمثل نقطة الاصل والنقطة P(-3,-4) ثم جد طول هذا المتجه؟ (واجب)**

العمليات على المتجهات

1- **عملية الجمع والطرح**:-

اذا كان :-

$$\vec{A} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$
$$\vec{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

فأنه:-

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + a_2)i + (\mathrm{b}_1 + b_2)\,\mathrm{j} + (\mathrm{c}_1 + c_2)\,\mathrm{k}$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - a_2)i + (\mathrm{b}_1 - b_2)\,\mathrm{j} + (\mathrm{c}_1 - c_2)\,\mathrm{k}$$

2- عملية الضرب بعدد حقيقي:-

اذا كان :-

$\vec{A} = ai + bj + ck$ وكان m عدد حقيقي فأن

$$m\vec{A} = mai + mbj + mck$$

Example(3):-

$$\vec{A} = 4i - 3j - 2k$$
$$\vec{B} = -5i + 4k$$
$$\vec{C} = -6j - 8k$$

Find :

1) $\vec{A} + \vec{B}$

2) $3 * \vec{C} - 4\vec{B}$

3) $|\vec{B}|$

4) $|\vec{A} + \vec{B}|$

Solution:-

$$1)\vec{A}+\vec{B} \Rightarrow \vec{A}+\vec{B} = (4+(-5))i+(-3+0)j+(-2+4)k$$

$$\vec{A}+\vec{B} \Rightarrow \vec{A}+\vec{B} = (4-5)i+(-3+0)j+(-2+4)k$$

$$\vec{A}+\vec{B} = -i-3j+2k$$

$$2)3\vec{C} = -18j-24k$$

$$4\vec{B} = -20i+16k$$

$$3\vec{C}-4\vec{B} = (0-(-20)i+(-18-0)\text{ j}+(-24-(+16))\text{ k}$$

$$3\vec{C}-4\vec{B} = (0+20)i+(-18-0)\text{ j}+(-24-16)\text{ k}$$

$$3\vec{C}-4\vec{B} = 20i-18j-40k$$

$$3)\left|\overrightarrow{B}\right| = \sqrt{a^2 i+b^2 j+c^2 k}$$

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \sqrt{(-5)^2 i+(0)^2 j+(4)^2 k}$$

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \sqrt{25+16}$$

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \sqrt{41}$$

$$4)\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{a^2 i+b^2 j+c^2 k}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{(-1)^2 i+(-3)^2 j+(4)^2 k}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{1+9+4}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{14}$$

3- الضرب العددي لمتجهين:-

اذا كان :-

$$\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$
$$\vec{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

متجهين فأنه حاصل ضربهما العددي يرمز له بالرمز $(\vec{A}.\vec{B})$ ويكون الحل كالتالي:-

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

- **ملاحظة:- لإيجاد الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ نطبق القانون التالي**

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

مثال:- اذا كان

$$\vec{A} = -i + 2j + k$$
$$\vec{B} = \imath + j + 2k$$

جد:-

1- $\vec{A}.\vec{B}$.

2- الزاوية المحصورة بين المتجهين.

3- هل ان المتجهان متعامدان ام لا بين ذلك.

ملاحظة :- يكون المتجهان متعامدان اذا كان حاصل ضربهما العددي يساوي صفر.

Solution:-

1)

$$\vec{A} = -i + 2j + k$$

$$\vec{B} = \imath + j + 2k$$

$$\vec{A}.\vec{B} = -1 + 2 + 2 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = -1 + 4 = 3$$

2)

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} \Rightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{1+4+1}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{6}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} \Rightarrow \left|\vec{B}\right| = \sqrt{1+1+4}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6} * \sqrt{6}} = \frac{\cancel{3}1}{\cancel{6}2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^0$$

$\therefore$ **المتجهان غير متعامدان لان حاصل ضربهما العددي لا يساوي صفر.**

مثال:- اذا كان

$$\vec{A} = i - 2j - 2k$$
$$\vec{B} = 6i + 3j + 2k$$

جد:-

1- $\vec{A}.\vec{B}$

2- الزاوية المحصورة بينهما.

Solution:-

1)

$$\vec{A} = i - 2j - 2k$$
$$\vec{B} = 6i + 3j + 2k$$
$$\vec{A}.\vec{B} = 6 - 6 - 4 = 6 - 10 = -4$$

2)

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \Rightarrow \sqrt{1+4+4}$$
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{9} = 3$$
$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} \Rightarrow \sqrt{36+9+4}$$
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{49} = 7$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{-4}{3*7} = \frac{-4}{21}$$
$$\because \theta = 101^0$$

4-الضرب الاتجاهي لمتجهين:-

اذا كان

$$\vec{A} = a_1 i + b_1 \imath j + c_1 k$$

$$\vec{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

متجهان فأنه حاصل ضربهما الاتجاهي $\vec{B},\vec{A}$ ويرمز له بالرمز $(\vec{A},\vec{B})$ ويمكن حسابة من القانون التالي:-

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

ملاحظة:- وحدة المتجه $\vec{A}$ التي يرمز لها بالرمز u تساوي:-

$$u = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

لإيجاد حاصل الضرب الاتجاهي $(\vec{A} x \vec{B})$ نقوم بتحويل المحدد الثلاثي الى محددات ثنائية وكالتالي:-

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مثال

اذا كان :-

$$\vec{A} = 3i - 2j$$
$$\vec{B} = -i + 3j - 4k$$

جد $(\vec{A}x\vec{B})$ ثم وحدة المتجه $(\vec{A}x\vec{B}), \vec{A}, \vec{B}$.

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow i = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = (8-0)i - (-12-0)\,\mathrm{j} + (9-2)\,\mathrm{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = 8i + 12j + 7k$$

$$u = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{(8)^2 + (12)^2 + (7)^2}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{64 + 144 + 49}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{257}$$

$$u = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|} = \frac{8i + 12j + 7k}{\sqrt{257}} = \frac{8}{\sqrt{257}}i + \frac{12}{\sqrt{257}}j + \frac{7}{\sqrt{257}}k$$

$$u = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$u = \frac{3i - 2j}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$$

مثال :- اذا كان

$$\vec{A} = 2i + 2j - k$$
$$\vec{B} = i - j - k$$

جد متجه وحدة يكون عمودياً على كل من $\vec{A},\vec{B}$

Solution:-

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow i\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = (-2-1)i - (-2-(-1))j + (-2-2)k$$

$$\vec{A}x\vec{B} = (-2-1)i - (-2+1)j + (-2-2)k$$

$$\vec{A}x\vec{B} = -3i + j - 4k$$

$$u = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-4)^2}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{9+1+16}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{26}$$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \frac{-3i + j - 4k}{\sqrt{26}} = \frac{-3}{\sqrt{26}}i + \frac{1}{\sqrt{26}}j - \frac{4}{\sqrt{26}}k$$