الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التقني في العمارة
قســـــم تقنيات المحاسبة

مبادئ الإحصاء
statistics

المستوى الاول

استاذ مساعد
نعيم منخي عودة
تدريسي المادة

تمثيل البيانات Data representation

من المفاهيم الشائعة بين الناس عن الإحصاء، ما هي إلا أرقام وبيانات رقمية فقط، كأعداد السكان، وأعداد المواليد، وأعداد الوفيات، وأعداد المزارعين، وأعداد المزارع، وخلافه، ومن ثم ارتبط مفهوم الناس عن الإحصاء بأنه عد أو حصر الأشياء والتعبير عنها بأرقام، وهذا هو المفهوم المحدود لعلم الإحصاء، ولكن الإحصاء كعلم، هو الذي يهتم بطرق جمع البيانات، وتبويبها، وتلخيصها بشكل يمكن الاستفادة منها في وصف البيانات وتحليلها للوصول إلى قرارات سليمة في ظل ظروف عدم التأكد.

وظائف علم الإحصاء :

من التعريف السابق يمكن تحديد أهم وظائف علم الإحصاء في الآتي:

1- **Data Description** وصف البيانات .

2- **Statistical Inference** الاستدلال الإحصائي .

3- **Forecasting** التنبؤ .

وبهذا يمكن القول أن :

علم الاحصاء Statistics هو العلم الذي يبحث في :

1. طرق جمع البيانات الصحيحة والدقيقة عن ظاهرة ما ، ثم تلخيص هذه البيانات (جدولياً او بيانياً) في صورة مبسطة يسهل معرفتها واستخدامها .
2. وصف هذه البيانات ثم تحليلها واستخراج النتائج منها واتخاذ القرارات المناسبة.
3. دراسة علاقة الظاهرة بباقي الظواهر وتقدير قيمة الظاهرة في المستقبل .

اقسام علم الاحصاء :

1. الاحصاء الوصفي **Descriptive Statistics** : يختص بجمع البيانات وعرضها ووصفها وتلخيصها .
2. الاحصاء الاستدلالي **Inductive Statistics** : يختص باستخلاص وتفسير النتائج واتخاذ القرارات .

مصطلحات احصائية :

1. **المجتمع Population :** هو مجموعة من المفردات او المشاهدات او الاشخاص والتي نرغب وتحليل خصائصه ، وهناك نوعان : مجتمع محدود او نهائي ، ومجتمع غير محدود او لا نهائي .
2. **العينة Sample:** هي اي مجموعة جزئية من المجتمع ، وتعبر عنه اصدق تعبير .
3. **المَعْلَمة او الاحصاءة Statistics** : عبارة عن قيمة عددية تعبر عن بيانات المجتمع .
4. **البيانات Data :** عبارة عن مجموعة القيم او القياسات للمتغير الذي يرافق المفردات او عناصر المجتمع وقد تكون على شكل ارقام او رموز .

طرق عرض البيانات

اولاً : عرض البيانات جدولياً بواسطة جداول التوزيع التكرارية

Frequency Distribution Tables

1 . عرض بيانات المتغير الوصفي في شكل جدول تكراري بسيط :

إذا كنا بصدد دراسة ظاهرة ما تحتوي على متغير وصفي واحد، فإنه يمكن عرض بياناته في شكل جدول تكراري بسيط، وهو جدول يتكون من عمودين، أحدهما به مستويات (مجموعات) المتغير (**Data**)، والثاني به عدد المفردات (التكرارات) (**Frequency**) لكل مستوى (مجموعة).
والمثال التالي يبين لنا كيف يمكن تبويب البيانات الوصفية الخام في شكل جدول تكراري بسيط :

مثال : اردنا معرفة اعداد الغرف في عينة عشوائية مكونة من 30 منزل في حي سكني معين ، فكانت النتائج كالآتي :

4	3	2	5	4	4	4	6	4	4
5	4	3	2	4	6	5	5	5	2
5	2	4	6	3	6	3	4	3	4

اعرض هذه البيانات بجدول توزيع تكراري مناسب ؟

الحل : المتغير هنا هو عدد الغرف وقيمه رقمية يمكن ترتيبها بشكل واضح يمكن فهمه ، وبما ان عدد البيانات او المشاهدات (وهي عدد الغرف في هذا المثال) قليل نسبيا ؛ لذلك نستخدم **الجدول التكراري البسيط** ، ويمكن تنفيذ حصر اعداد الغرف بأسلوب اكثر سهولة ودقة وذلك باستخدام العلامات او (الترميز **Coding**) وبهذا يكون عدد اعمدة الجدول التكراري البسيط ثلاثة اعمدة ، وكالآتي :

Data عدد الغرف	Coding الترميز	Frequency التكرار
2	||||	4
3	~~||||~~	5
4	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
5	~~||||~~ |	6
6	||||	4
Total		30

اضافة الى انشاء جدول تكراري ، احيانا يُطلب منّا في السؤال حساب التكرار النسبي (**Relative Frequency R.F**) او التكرار المئوي (**Percentage Frequency P.F**)
او كلاهما معا وفي هذه الحالة سوف نُضيف عمود لكل مطلب وكما في المثال الآتي :

مثال : البيانات ادناه هي درجات 25 طالب في امتحان قصير ،اعرض هذه البيانات بجدول توزيع تكراري مناسب ثم احسب كلاً من التكرار النسبي (**R.F**) والتكرار المئوي (**P.F**) ؟

5	7	8	5	6
8	6	8	9	8
7	9	7	10	5
10	8	9	3	7
6	5	7	7	3

الحل : لمعرفة نوع الجدول لتكراري الذي سنعرض به البيانات المعطاة نستخرج المدى (**Range**) والذي يساوي الفرق بين اعلى قيمة في بيانات السؤال واقل قيمة ، اي ان :

المدى = أعلى قيمة – أقل قيمة $\quad$ **Range = Max –Min**

$= 10 - 3 = 7$

وبما ان المدى قليل ؛ لذا سوف نستخدم الجدول التكراري البسيط :

وكذلك يمكن إيجاد التكرار النسبي بواسطة القانون الآتي :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\boxed{\text{Relative frequency R.F} = \frac{Frecuency}{Total}}$$

وكذلك التكرار المئوي يمكن ايجاده بالقانون :

$$\text{التكرار المئوي} = \frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 100$$

$$\text{التكرار المئوي} = \text{التكرار النسبي} \times 100$$

Percentage Frequency (P.F)= Relative Frequency (R.F) × 100

وبعد معرفة القوانين اللازمة لإتمام عرض البيانات بالجدول التكراري البسيط نُنشئ الجدول وكالآتي :

Data البيانات	codingالترميز	fi التكرارات	R.F التكرار النسبي	P.F التكرار المئوي
3	||	2	$R.F = \frac{2}{25} = 0.08$	$P.F = 0.08 \times 100 = 8$
5	||||	4	$R.F = \frac{4}{25} = 0.16$	$P.F = 0.16 \times 100 = 16$
6	|||	3	$R.F = \frac{3}{25} = 0.12$	$P.F = 0.12 \times 100 = 12$
7	卌 |	6	$R.F = \frac{6}{25} = 0.24$	$P.F = 0.24 \times 100 = 24$
8	卌	5	$R.F = \frac{5}{25} = 0.20$	$P.F = 0.20 \times 100 = 20$
9	|||	3	$R.F = \frac{3}{25} = 0.12$	$P.F = 0.12 \times 100 = 12$
10	||	2	$R.F = \frac{2}{25} = 0.08$	$P.F = 0.08 \times 100 = 8$
Total		25	$= 1.00$	$= 100$

احياناً تكون قيم التكرار النسبي عبارة عن كسور عشرية بمراتب كثيرة ولكي نحصل على دقة مقبولة نوعاً ما نأخذ ثلاث مراتب عشرية لغرض الحصول على مجموع التكرارات النسبية مساوياً للواحد الصحيح تقريباً .

2 . عرض بيانات المتغير الوصفي في شكل جدول توزيع تكراري ذو فئات :

Frequency Distribution Table

أما إذا كان عدد البيانات كبير وتكراراتها قليلة ومداها (الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة) أيضاً كبير بحيث لا يمكن إدراجها جميعها في الجدول التكراري ، ففي هذه الحالة نلجأ إلى تقسيم تلك البيانات إلى فئات **Classes** وتكون طريقة حل مثل هذه الأسئلة كالآتي :

1 . نجد المدى والذي يساوي : أكبر قيمة – أقل قيمة .

2 . نجد عدد الفئات (وهذا غالباً ما يعطى في السؤال) .

3 . نجد طول الفئة وذلك بقسمة المدى على عدد الفئات (بحيث نقرب الناتج إلى اقرب عدد صحيح)

4 . نضع أقل قيمة كحد أدنى للفئة الأولى ، أما الحد الأعلى لتلك الفئة فنجده كالآتي :

الحد الأعلى للفئة = الحد الأدنى لتلك الفئة + طول الفئة ، وبهذا نكون قد وجدنا حدود الفئة الأولى .

5 . أما الفئة الثانية فيكون حدها الأدنى هو أكثر من الحد الأعلى للفئة الأولى بمقدار واحد (إذا كانت القيم أعداد صحيحة) ،أو أكثر من الحد الأعلى للفئة الأولى بمقدار مرتبة عشرية واحدة (إذا كانت القيم كسور عشرية) ، وحدّها الأعلى نجده بالعلاقة السابقة . وهكذا بالنسبة إلى باقي الفئات ، اما اعلى قيمة ضمن القيم (البيانات) فنضعها كحد اعلى للفئة الاخيرة .

6 . بعد أن أنهينا العمود الأول من الجدول التكراري ، ندرج العلامات او (الترميز **Coding**) في العمود الثاني .

7 . اما العمود الثالث فندرج فيه التكرارات **Frequency**

8 . ثم نضع في العمود الرابع مركز الفئة والذي يساوي :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى}}{2}$$

9 . في العمود الخامس ندرج الحدود الفعلية أو(الحقيقية) والتي نحصل عليها كما يأتي :

ننقص من الحد الادنى مقدار(0.5) لنحصل على الحد الادنى الفعلي (الحقيقي) ، اما الحد الاعلى الفعلي (الحقيقي) فنحصل عليه بإضافة (0.5) للحد الاعلى .

اما اذا طُلب في السؤال ايضاً حساب التكرار النسبي والتكرار المئوي فنحسبه كما تعلمنا سابقا ثم ندرجهما في العمودين الاخيرين .

<u>مثال :</u> اعرض البيانات الآتية بجدول توزيع تكراري مناسب ثم احسب التكرار النسبي (R.F) واحسب التكرار المئوي (P.F) ؟ (اختر 8 فئات)

56	65	70	65	55	60	66	70	75	56
60	70	61	67	61	71	67	62	71	66
68	72	57	68	72	69	57	71	69	75
72	62	67	73	58	63	66	73	63	65
58	73	74	76	74	80	81	60	74	58
76	82	77	83	77	85	90	78	90	72
79	64	57	79	55	87	64	88	78	62

<u>الحل :</u> نجد اولاً المدى = اكبر قيمة – اقل قيمة

= 90 – 55 = 35

نجد الان طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{35}{8} = 4.37 \approx 4$

تحديد الفئات:

كل فئة تبدأ بقيمة تسمى الحد الأدنى، وتنتهي بقيمة تسمى الحد الأعلى، ومن ثم نجد أن :

- الحد الأدنى للفئة الأولى هو أقل قراءة (درجة) أي أن الحد الأدنى للفئة الأولى = 55

الحد الأعلى للفئة الأولى = الحد الأدنى + طول الفئة

= 55 + 4 = 59

- الحد الأدنى للفئة الثانية = الحد الأعلى للفئة الأولى + 1

= 59 + 1 = 60

الحد الأعلى للفئة الثانية = الحد الأدنى للفئة + طول الفئة

= 60 + 4 = 64

وهكذا بقية الفئات ، ويجب مراعاة ان تكون اكبر قيمة ضمن الفئة الاخيرة

الفئات Classes	الترميز Coding	التكرارات fi	مركز الفئة *xi*	الحدود الحقيقية Classes interval	التكرار النسبي R.F	التكرار المئوي P.F
55 – 59	𝍸 𝍸	10	57	54.5 – 59.5	$R.F = \frac{10}{70} = 0.142$	$0.142 \times 100 = 14.2$
60 – 64	𝍸 𝍸 ||	12	62	59.5 – 64.5	$R.F = \frac{12}{70} = 0.171$	$0.171 \times 100 = 17.1$
65 – 69	𝍸 𝍸 |||	13	67	64.5 – 69.5	$R.F = \frac{13}{70} = 0.185$	$0.185 \times 100 = 18.5$
70 – 74	𝍸 𝍸 𝍸 |	16	72	69.5 – 74.5	$R.F = \frac{16}{70} = 0.228$	$0.228 \times 100 = 22.8$
75 – 79	𝍸 𝍸	10	77	74.5 – 79.5	$R.F = \frac{10}{70} = 0.142$	$0.142 \times 100 = 14.2$
80 – 84	||||	4	82	79.5 – 84.5	$R.F = \frac{4}{70} = 0.057$	$0.057 \times 100 = 5.7$
85 – 89	|||	3	87	84.5 – 89.5	$R.F = \frac{3}{70} = 0.042$	$0.042 \times 100 = 4.2$
90 – 94	||	2	92	89.5 – 94.5	$R.F = \frac{2}{70} = 0.028$	$0.028 \times 100 = 2.8$
Total		70			= 0.995 ≈1.00	= 99.5 ≈ 100

التوزيعات التكرارية المتجمعة :

في كثير من الأحيان قد يحتاج الباحث إلى معرفة عدد المشاهدات التي تقل عن قيمة معينة أو تزيد عن قيمة معينة، ومن ثم يلجأ الباحث إلى تكوين جداول تجميعية صاعدة أو هابطة، وفيما يلي بيان كيفية تكوين كل نوع من هذين النوعين على حدة:

1 . التوزيع التكراري المتجمع الصاعد Cumulative Frequency Distribution

نحتاج في كثير من الأحيان معرفة عدد المشاهدات (التكرارات) التي تساوي قيمة معينة أو تكون أصغر منها ، فعلى سبيل المثال إذا حصل طالب على الدرجة (80) في أحد الامتحانات ، فإنه يرغب في معرفة عدد الطلبة الحاصلين على الدرجة (80) أو أقل في ذلك الامتحان ، حيث يمكننا معرفة ذلك من خلال جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد .

التكرار المتجمع الصاعد للفئة الأولى هو نفسه تكرار الفئة الأولى الموجود في حقل التكرارات ، والتكرار المتجمع الصاعد للفئة الثانية هو حاصل جمع تكرار الفئة الأولى وتكرار الفئة الثانية ، أما التكرار المتجمع الصاعد للفئة الثالثة فهو حاصل جمع تكرارات الفئة الأولى والثانية والثالثة ، وهكذا حتى آخر فئة والتي يكون تكرارها المتجمع الصاعد مساوي إلى مجموع التكرارات الكلية في أسفل الحقل.

مثال : للبيانات الآتية ، كوّن جدول التوزيع التكراري واحسب التكرار المتجمع الصاعد ؟
(اختر 7 فئات) ؟

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	118	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

الحل : المدى = اكبر قيمة – اقل قيمة
= 176 – 119 = 57

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{57}{7} = 8.1 \approx 8$$

(يجب ان يكون عدد صحيح بدون كسور عشرية)

الفئات Classes	الترميز Coding	التكرارات fi	مركز الفئة x_i	الحدود الحقيقية Classes interval	التكرار المتجمع الصاعد C.F
119 – 127	ǀǀǀ	3	123	118.5 – 127.5	3
128 – 136	𝍸	5	132	127.5 – 136.5	8
137 – 145	𝍸 ǀǀǀǀ	9	141	136.5 – 145.5	17
146 – 154	𝍸 𝍸 ǀǀ	12	150	145.5 – 154.5	29
155 – 163	𝍸	5	159	154.5 – 163.5	34
164 – 172	ǀǀǀǀ	4	168	163.5 – 172.5	38
173 – 181	ǀǀ	2	177	172.5 – 181.5	40
Total		**40**			

2 . التوزيع التكراري المتجمع النازل

Cumulative Frequency Distribution "Or More"

أما عندما نحتاج معرفة عدد المشاهدات (التكرارات) التي تساوي قيمة معينة أو تكون أكبر منها فإننا يمكن إيجاده من خلال معرفة التكرار المتجمع النازل ، حيث يمكن للطالب الذي يحصل على درجة (80) من معرفة عدد الطلبة الذين حصلوا على نفس درجته أو أكثر من معرفة التكرار المتجمع النازل .

وجدول هذا التكرار مشابه تماماً لجدول التكرار الصاعد من حيث الأعمدة وطرق إيجاد الحدود الفعلية للفئات (classes interval) لكن الذي يختلف هو طريقة حساب التكرارات المتجمعة النازلة فهي تُحسب كالآتي :

يكون التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى هو نفسه مجموع التكرارات الكلية ، أما التكرار النازل للفئة الثانية فيكون حاصل طرح التكرار النازل للفئة الأولى (والذي يمثل مجموع التكرارات الكلية) مطروحاً منه تكرار الفئة الأولى ، والتكرار النازل للفئة الثالثة يكون حاصل طرح التكرار النازل

للفئة الثانية مطروحاً منه تكرار الفئة الثانية ، وهكذا حتى نصل إلى الفئة الأخيرة والتي يكون تكرارها المتجمع النازل هو نفسه تكرارها في العمود .

وبهذا يكون جدول التكرار المتجمع النازل للمثال السابق (بعد ايجاد المدى وطول الفئة) في صيغته النهائية كالآتي :

الفئات Classes	الترميز Coding	التكرارات fi	مركز الفئة *xi*	الحدود الحقيقية Classes interval	التكرار المتجمع النازل "Or More"
119 – 127	𝍷𝍷𝍷	3	123	118.5 – 127.5	40
128 – 136	𝍸	5	132	127.5 – 136.5	37
137 – 145	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9	141	136.5 – 145.5	32
146 – 154	𝍸 𝍸 𝍷𝍷	12	150	145.5 – 154.5	23
155 – 163	𝍸	5	159	154.5 – 163.5	11
164 – 172	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	168	163.5 – 172.5	6
173 – 181	𝍷𝍷	2	177	172.5 – 181.5	2
Total		**40**			

(ملاحظة : يمكن إدراج التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل في جدول واحد)

<u>مثال :</u> للبيانات الآتية ، كوّن جدول التوزيع التكراري واحسب التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل معا في جدول واحد ؟

فئات classes	32 -	36 -	40 -	44 -	48 -	52 -	56 -
تكرارات fi	10	6	8	4	8	9	15

الحل : في مثل هذا النوع من الاسئلة لا نحتاج لاستخراج المدى ولا طول الفئة لان الجدول يوضّح كل هذا وكل ما يجب عمله هو انشاء جدول التوزيع التكراري وادراج عمودين في آخر الجدول للتكرار الصاعد والتكرار النازل ، وكما يأتي :

الفئات Classes	التكرارات fi	مركز الفئة *xi*	الحدود الحقيقية Classes interval	التكرار المتجمع الصاعد C.F	التكرار المتجمع النازل "Or More"
32 – 35	10	33.5	31.5 – 35.5	10	60
36 – 39	6	37.5	35.5 – 39.5	16	50
40 – 43	8	41.5	39.5 – 43.5	24	44
44 – 47	4	45.5	43.5 – 47.5	28	36
48 – 51	8	49.5	47.5 – 51.5	36	32
52 – 55	9	53.5	51.5 – 55.5	45	24
56 – 59	15	57.5	55.5 – 59.5	60	15
Total	**60**				

ثانياً : التمثيل البياني (الرسوم البيانية) للتوزيعات التكرارية

Graphical Representation Of Frequency Distribution :

تستخدم الرسوم البيانية لتوضيح البيانات الإحصائية وتحويلها إلى مخططات بيانية يسهل الاطلاع عليها والتعرف على محتوياتها ، ومن هذه المخططات :

1. المدرج التكراري : Frequency Histogram

وهو مجموعة من المستطيلات المتلاصقة والتي تكون عادةً قواعدها متساوية حيث تمثل هذه القواعد طول الفئة ، أما ارتفاعات المستطيلات فتمثل التكرارات . وتكون المقارنة في هذه الحالة عن طريق ارتفاعات المستطيلات ، أما إذا كانت الفئات غير متساوية في الطول فسوف تكون قواعدها غير متساوية أيضاً ، وفي هذه الحالة تكون المقارنة عن طريق مساحات تلك المستطيلات بدلاً من ارتفاعاتها . وعند رسمها تكون الحدود الفعلية للفئات على المحور الأفقي بينما التكرارات على المحور العمودي .

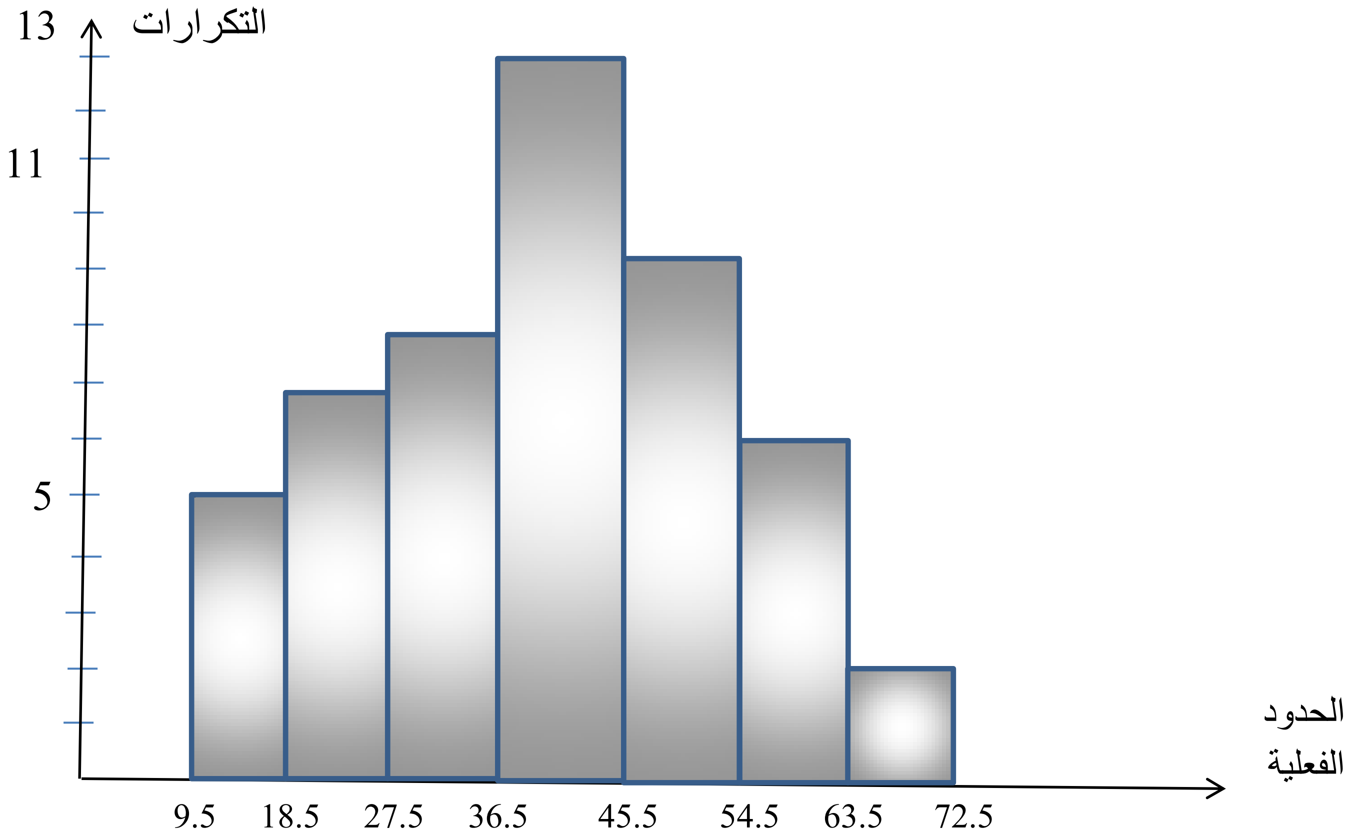
مثال : للبيانات ادناه ، ارسم المدرج التكراري **Frequency Histogram** ؟

فئات classes	10 -	19 -	28 -	37 -	46 -	55 -	64 -
تكرارات fi	5	7	8	13	9	6	2

الحل : لكي نرسم المدرج التكراري يجب ان نكوّن جدول توزيع تكراري فيه ثلاثة اعمدة هي : الفئات والتكرارات والحدود الفعلية . ثم بعدها نرسم المدرج وكالآتي :

الفئات Classes	التكرارات fi	الحدود الحقيقية Classes interval
10 – 18	5	9.5 – 18.5
19 – 27	7	18.5 – 27.5
28 – 36	8	27.5 – 36.5
37 – 45	13	36.5 – 45.5
46 – 54	9	45.5 – 54.5
55 – 63	6	54.5 – 63.5
64 – 72	2	63.5 – 72.5

وبعد ايجاد الحدود الحقيقية للفئات نرسم الاحداثيين المتعامدين ، حيث نضع الحدود الفعلية على الاحداثي الافقي ، ونضع التكرارات على الاحداثي العمودي بعد تقسيم كل احداثي الى تقسيمات مناسبة بحيث تغطي كل القيم المعطاة في السؤال ثم نبدأ برسم مستطيلات المدرج التكراري ، وكالآتي :



2 . (المضلع التكراري) Frequency polygon

هو مضلع مغلق نحصل عليه بتنصيف الأضلاع العلوية للمستطيلات التي رسمناها في المدرج التكراري ثم نوصل هذه النقاط بخطوط مستقيمة ، أو هو عبارة عن مخطط بياني تمثل فيه مراكز الفئات الإحداثي الأفقي ، أما التكرارات فتمثل الإحداثي العمودي .

ولكي نغلق المضلع التكراري نأخذ فئتين متطرفتين ، واحدة إلى أقصى اليسار (أقل من الأولى) ونعتبر تكرارها يساوي صفراً ، والثانية إلى أقصى اليمين (أكبر من الأخيرة) وأيضاً نعتبر تكرارها صفراً . حيث نحدد مراكز الفئات xi على المحور الأفقي والتكرارات على المحور العمودي ، ثم نقاطع كل مركز فئة مع التكرار المقابل له حتى نحصل على مجموعة من النقاط حيث نقوم بإيصال تلك النقاط مع بعضها بخطوط مستقيمة ثم نغلق المضلع بالفئتين المتطرفتين اللتان يكون تكرارهما صفراً .

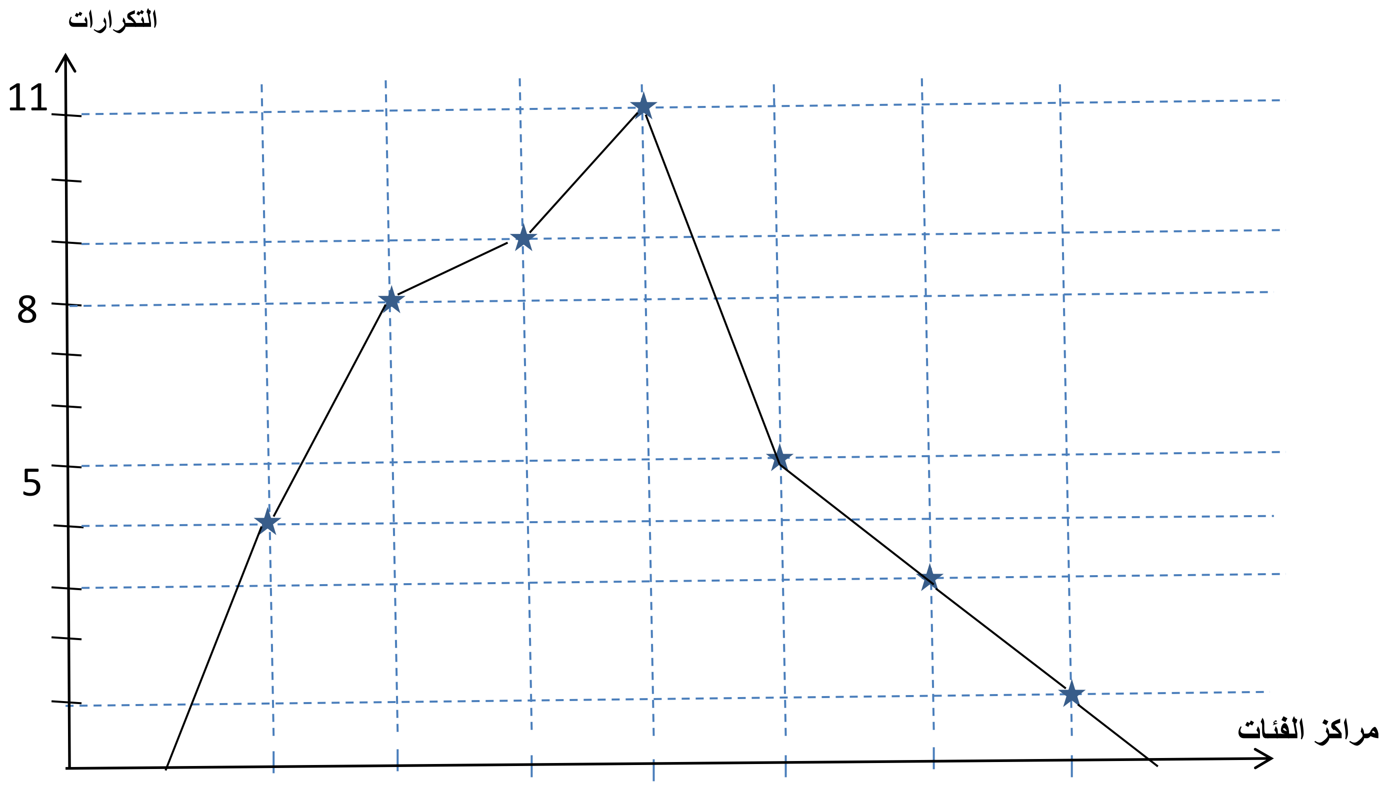
<u>مثال :</u> للبيانات ادناه ، ارسم المضلع التكراري **Frequency polygon** ؟

فئات classes	23 -	32 -	41 -	50 -	59 -	68 -	77 -
تكرارات fi	4	8	9	11	5	3	1

الحل : لكي نرسم المضلع التكراري يجب ان نكوّن جدول توزيع تكراري فيه ثلاثة اعمدة هي : الفئات والتكرارات ومراكز الفئات. ثم بعدها نرسم المدرج وكالآتي :

الفئات Classes	التكرارات fi	مركز الفئة xi
23 − 31	4	27
32 − 40	8	36
41 − 49	9	45
50 − 58	11	54
59 − 67	5	63
68 − 76	3	72
77 − 85	1	81

وبعد ايجاد مراكز الفئات نرسم الاحداثيين المتعامدين ، حيث نضع مراكز الفئات على الاحداثي الافقي ، ونضع التكرارات على الاحداثي العمودي بعد تقسيم كل احداثي الى تقسيمات مناسبة بحيث تغطي كل القيم المعطاة في السؤال ثم نبدأ برسم خطوط المضلع التكراري ، وكالآتي :

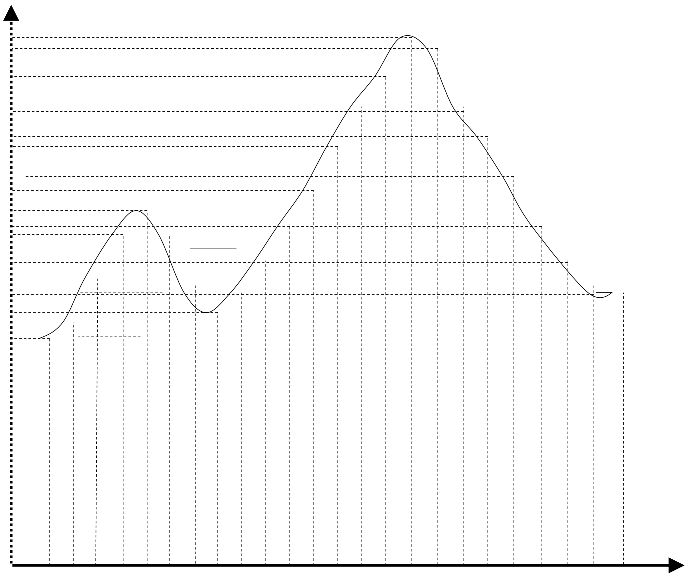


3 . المنحنى التكراري Frequency curve :

في بعض التوزيعات التكرارية يكون عدد الفئات كبير وطول الفئة قليل وعدد التكرارات كبير بحيث تكون النقاط التي نحصل عليها في المضلع التكراري السابق متقاربة وتكاد تقترب الخطوط المستقيمة الواصلة بين تلك النقاط من الشكل المنحني .

ويمكن القول بأن المنحنى التكراري هو عبارة عن مضلع تكراري تقترب فيه الخطوط المستقيمة من منحنيات لتقارب نقاط تقاطع مراكز الفئات مع التكرارات المقابلة لها ، وتكون طريقة رسم المنحنى التكراري بنفس طريقة رسم المضلع التكراري ، حيث نضع مراكز الفئات على المحور الأفقي والتكرارات على المحور العمودي ثم نقاطع مركز كل فئة مع التكرار المقابل لها حتى نحصل على خط منحني .

والشكل أدناه يبين ذلك :



لاحظ أن عدد الفئات كبير وكذلك التكرارات بينما طول الفئة قليل ؛ لذا كان شكل الخط الواصل بين النقاط هو عبارة عن خط منحني والذي يمثل المنحنى التكراري .

4 . المضلع التكراري المتجمع Cumulative frequency polygon :

وهو عبارة عن مضلع ناتج من مجموعة من الخطوط المستقيمة والتي نحصل عليها من تقاطع مراكز الفئات (والتي تمثل الإحداثي الأفقي أو السيني) مع التكرارات المتجمعة (والتي تمثل الإحداثي العمودي أو الصادي) ، وهو على نوعين :

1. المضلع التكراري المتجمع الصاعد .
2. المضلع التكراري المتجمع النازل .

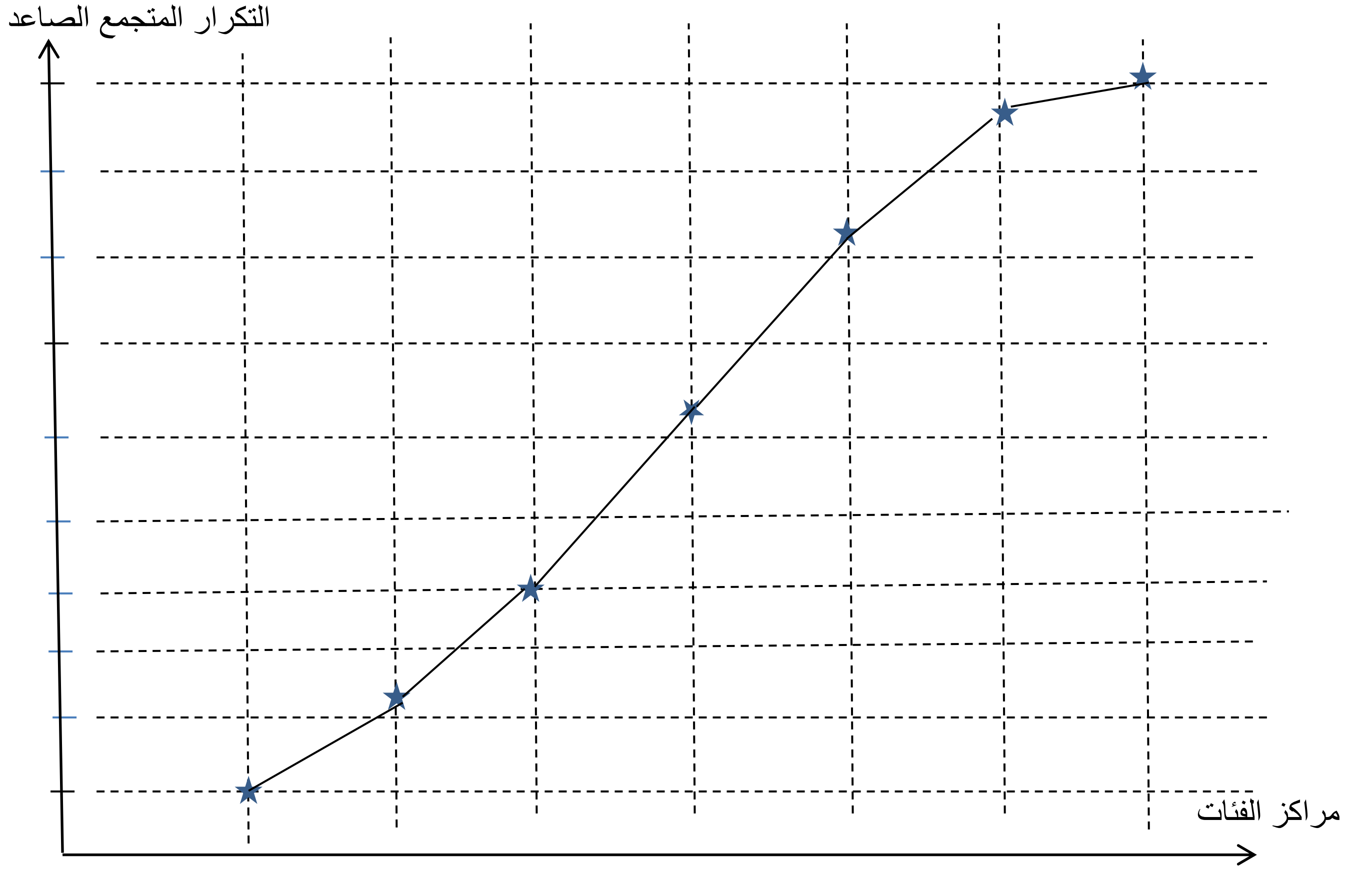
ولكي نرسم أيّاً من هذين المضلعين نقوم أولاً بتكوين الجدول التكراري المتجمع (الصاعد أو النازل حسب ما مطلوب في السؤال) ثم نرسم الإحداثيين المتعادين حيث أن الأفقي يمثل مراكز الفئات والعمودي يمثل التكرارات المتجمعة ، ثم نحدد تقاطع مركز كل فئة مع التكرار المتجمع المقابل له ، وبعدها نقوم بإيصال تلك النقاط بخطوط مستقيمة لنحصل على المضلع المطلوب .

مثال : ارسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد للبيانات الآتية :

فئات classes	10 -	19 -	28 -	37 -	46 -	55 -	64 -
تكرارات fi	5	7	8	13	9	6	2

الحل : لكي نرسم المضلع التكراري الصاعد ، يجب ان نكون جدول توزي للتكرار المتجمع الصاعد ثم نبدأ بالرسم حيث نضع التكرار المتجمع الصاعد على الإحداثي العمودي ونضع مراكز الفئات على الاحداثي الافقي وكما يأتي :

الفئات Classes	التكرارات fi	مركز الفئة xi	التكرار المتجمع الصاعد C.F
10 – 18	5	14	5
19 – 27	7	23	12
28 – 36	8	32	20
37 – 45	13	41	33
46 – 54	9	50	42
55 – 63	6	59	48
64 – 72	2	68	50

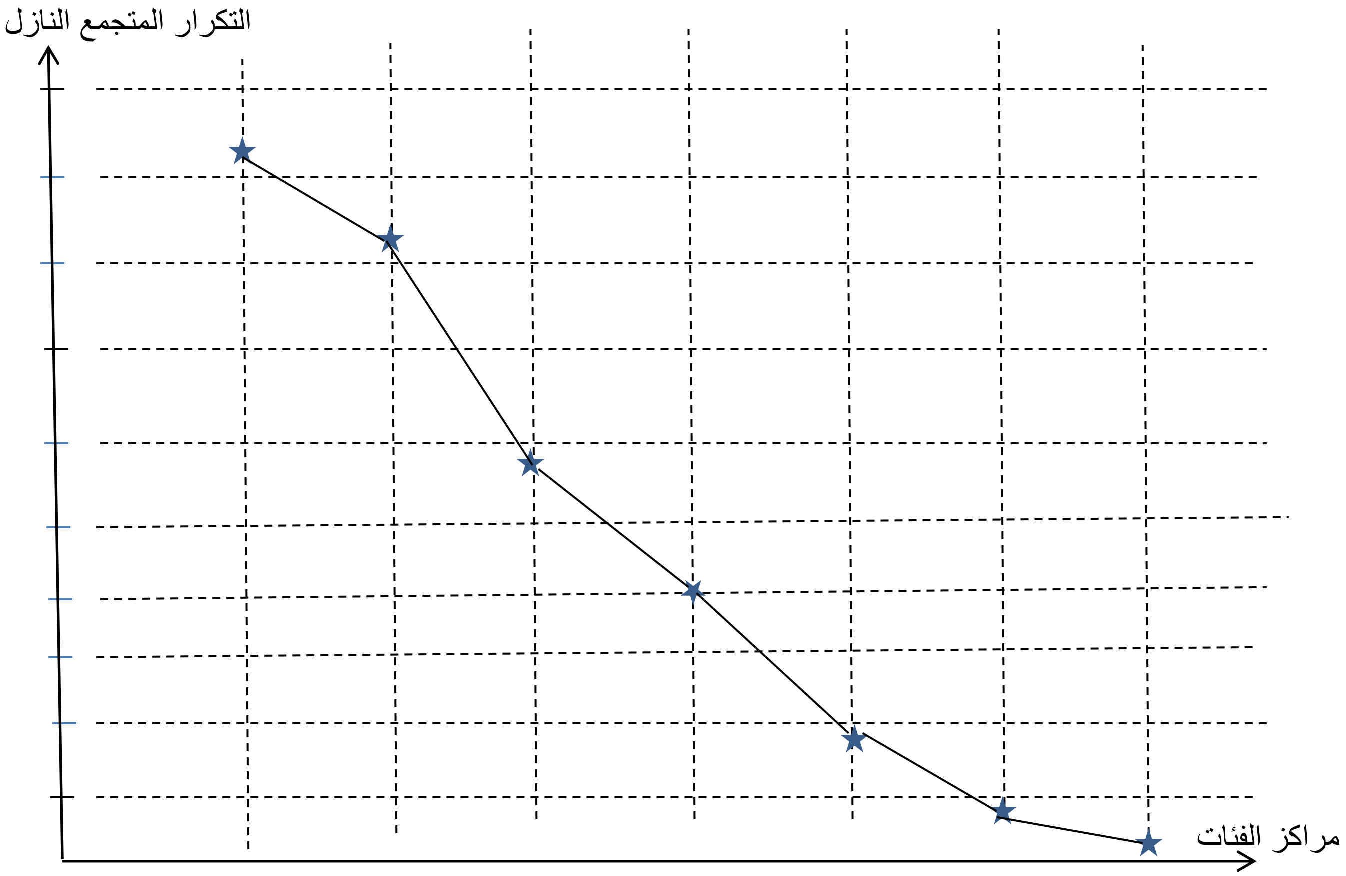


مثال : ارسم المضلع التكراري المتجمع النازل للبيانات الآتية :

فئات classes	23 -	32 -	41 -	50 -	59 -	68 -	77 -
تكرارات fi	4	8	9	11	5	3	1

الحل : لكي نرسم المضلع التكراري النازل ، يجب ان نكون جدول توزي للتكرار المتجمع النازل ثم نبدأ بالرسم حيث نضع التكرار المتجمع النازل على الإحداثي العمودي ونضع مراكز الفئات على الاحداثي الافقي وكما يأتي :

الفئات Classes	التكرارات fi	مركز الفئة xi	التكرار المتجمع النازل "Or More"
23 – 31	4	27	41
32 – 40	8	36	37
41 – 49	9	45	29
50 – 58	11	54	20
59 – 67	5	63	9
68 – 76	3	72	4
77 – 85	1	81	1



5. القطاع الدائري : Pie diagram

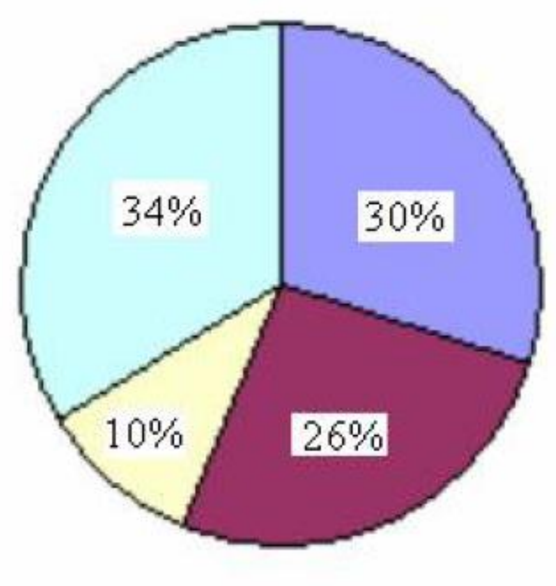
ويتكون القطاع الدائري برسم دائرة توزع الى قطاعات ، كل قطاع منها يعكس حجم كل فئة أو قراءة ويحدد حجم كل قطاع بمقدار الزاوية المركزية التي يمثلها نسبة لتكرار كل قراءة ، وتُحسب زاوية القطاع Sector angle لكل تكرار وذلك بضرب التكرار النسبي لها في 360 وكما في المثال أدناه :

<u>مثال :</u> للجدول أدناه ، ارسم القطاع الدائري ؟

فئات Classes	تكرارات Freq.
119 - 128	15
129 - 138	13
139 - 148	5
149 - 158	17

<u>الحل :</u> لرسم القطاع الدائري ، نكوّن جدول توزيع تكراري يتألف من فئات وتكرارات وتكرار نسبي ، والحقل الاخير ندرج فيه زاوية القطاع الدائري لكل فئة حيث نحصل عليها بضرب التكرار النسبي لكل فئة بالزاوية الدائرية (360°) ، ويجب ان يكون مجموع زوايا القطاعات الدائرية جميعا يساوي (360°) ، وكالآتي :

فئات Classes	تكرارات Freq	التكرار النسبي R.F	زاوية القطاع الدائري Angle of Pie diagram
119 - 128	15	15 / 50 = 0.30	$0.30 \times 360 = 108^{\circ}$
129 - 138	13	13 / 50 = 0.26	$0.26 \times 360 = 93.6^{\circ}$
139 - 148	5	5 / 50 = 0.10	$0.10 \times 360 = 36^{\circ}$
149 - 158	17	17 / 50 = 0.34	$0.34 \times 360 = 122.4^{\circ}$
TOTAL	50	= 1.00	$= 360^{\circ}$



مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

وهي المقاييس التي من خلالها نستطيع تحديد موقع مركز التوزيع الخاص بأي مجموعة من البيانات ، لذا فهي تعتبر مقاييس موقع تصف التوزيعات التكرارية عددياً أي أن قيمها تكون على المحور الأفقي الذي يمثل قيم البيانات .

وعند دراستنا لهذه المقاييس سنستخدم الرمز ($\sum$ سيكما) والذي يمثل عملية جمع متكرر لقيم او (تكرارات) ظاهرة معينة .

ملاحظة : نرمز لأي مشاهدة (ظاهرة) بأحد الحروف الإنكليزية مثل X أو Y .... ونرمز لتكرارها بالرمز i الذي يأخذ أعداد صحيحة . وكذلك نرمز لمجموع تلك التكرارات بالرمز ($\sum$ سيكما) . حيث ان :

$$\sum_{i=1}^{n} xi = x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots + x_n \qquad ; \qquad i = 1,2,3,\dots\dots\dots\dots, n$$

مثال : لتكن x تمثل ظاهرة معينة ، وكانت قيم xi كالآتي : $xi = 3, 2, 4, 1$

جد $\sum_{i=1}^{4} xi$ ؟

الحل :

$$\sum_{i=1}^{4} xi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$= 3 + 2 + 4 + 1 = 10$$

مثال : لتكن y تمثل ظاهرة معينة ، وكانت قيم yi كالآتي : $yi = 3, 0, 4, 5, 2$

جد $\sum_{i=1}^{5} yi$ ؟

الحل :

$$\sum_{i=1}^{5} yi = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$
$$= 3 + 0 + 4 + 5 + 2 = 7$$

مثال : لتكن xi و yi ظاهرتين لهما القيم الآتية : $xi = 4, 1, 5, 3$ و $yi = 2, 0, 3, 6$

احسب ما يأتي : $\sum_{i=1}^{4} 3xi$ ، $\sum_{i=1}^{4} 5yi$ ، $\sum_{i=1}^{4} (xi + yi)$

الحل :
$$\sum_{i=1}^{4} 3xi=(3\times4)+(3\times1)+(3\times5)+(3\times3)=12+3+15+9=39$$

$$\sum_{i=1}^{4} 5yi=(5\times2)+(5\times0)+(5\times3)+(5\times6)=10+0+15+30=55$$

$$\sum_{i=1}^{4}(xi+yi)=(4+2)+(1+0)+(5+3)+(3+6)=6+1+8+9=24$$

مبرهنة : لتكن xi و yi اي ظاهرتين فأن : $\sum_{i=1}^{n}(xi+yi)=\sum_{i=1}^{n}xi+\sum_{i=1}^{n}yi$

البرهان : نأخذ الطرف الأيسر Left Hand Side (L . H .S) :

$$\sum_{i=1}^{n}(xi+yi)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+\dots\dots\dots\dots+(x_n+y_n)$$
$$=x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3+\dots\dots\dots\dots\dots+x_n+y_n$$
$$=(x_1+x_2+x_3+\dots\dots\dots+x_n)+(y_1+y_2+y_3+\dots\dots\dots\dots+y_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}xi+\sum_{i=1}^{n}yi=R.H.S$$

امثلة محلولة : لتكن Xi = 2 , 5 , 1 , 3 و Yi = 1 , 4 , 2 , 1 ، احسب ما يأتي :

1. $\sum_{i=1}^{4}(xi)^2$
2. $\sum_{i=1}^{4}xi\ yi$
3. $\sum_{i=1}^{4}xi\sum yi$
4. $\left[\sum_{i=1}^{4}xi\right]^2\left[\sum_{i=1}^{4}yi\right]$
5. $\sum_{i=1}^{4}\frac{(xi+1)}{yi}$

الحل :

$$1.\ \sum_{i=1}^{4}(xi)^2=(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2$$
$$=(2)^2+(5)^2+(1)^2+(3)^2=4+25+1+9=39$$

$$2.\sum_{i=1}^{4} xi\ yi = (x_1y_1)+(x_2y_2)+(x_3y_3)+(x_4y_4)$$
$$=(2\times1)+(5\times4)+(1\times2)+(3\times1)$$
$$=2+20+2+3=27$$

$$3.\sum_{i=1}^{4} xi \sum_{i=1}^{4} yi=(x_1+x_2+x_3+x_4)(y_1+y_2+y_3+y_4)$$
$$=(2+5+1+3)(1+4+2+1)$$
$$=11\times8=88$$

$$4.\left[\sum_{i=1}^{4} xi\right]^2 \left[\sum_{i=1}^{4} yi\right]=[x_1+x_2+x_3+x_4]^2\times[y_1+y_2+y_3+y_4]$$
$$=[2+5+1+3]^2\times[1+4+2+1]$$
$$=(11)^2\times(8)=121\times8=968$$

$$5.\sum_{i=1}^{4}\frac{(xi+1)}{yi}=\frac{(x_1+1)}{y_1}+\frac{(x_2+1)}{y_2}+\frac{(x_3+1)}{y_3}+\frac{(x_4+1)}{y_4}$$
$$=\frac{(2+1)}{1}+\frac{(5+1)}{4}+\frac{(1+1)}{2}+\frac{(3+1)}{1}$$
$$=\frac{3}{1}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{4}{1}=\frac{12+6+4+16}{4}=\frac{38}{4}$$

<u>تمارين للحل :</u> لتكن $Xi = 3 , 2 , 1$ و $Yi = 2 , 1 , 5$ ، جد ناتج ما يأتي :

$$1.\left[\sum_{i=1}^{3} xi \sum_{i=1}^{3} yi\right]^2 \qquad 2.\sum_{i=1}^{3} xi\,yi \sum_{i=1}^{3}(xi)^2 \qquad 3.\sum_{i=1}^{3}\frac{2xi+3}{3yi}$$

ومن هذه المقاييس :

أولاً:الوسط الحسابي ($\bar{X}$) : Arithmatic Mean

من أهم مقاييس النزعة المركزية ، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية ، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة ، كما يلي :

1 . الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

يعرف الوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها . فإذا كان لدينا n من القيم ويرمز لها بالرمز: $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$

فإن الوسط الحسابي لهذه القيم ، ونرمز له بالرمز $\bar{x}$ يحسب بالمعادلة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال : للبيانات الآتية ، احسب الوسط الحسابي 12 , 2 , 22 , 17 , 0 , 5 , 15 ؟

الحل :

$$\bar{x} = \frac{12+2+22+17+0+5+15+7}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

2 . الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

من المعلوم أن القيم الأصلية ، لا يمكن معرفتها من جدول التوزيع التكراري ، حيث أن هذه القيم موضوعة في شكل فئات ، ولذا يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة بمركز هذه الفئة ، ومن ثم يؤخذ في الاعتبار أن مركز الفئة هو القيمة التقديرية لكل مفردة تقع في هذه الفئة.

فإذا كانت k هي عدد الفئات ، وكانت $x_1, x_2, \ldots, x_k$ هي مراكز هذه الفئات، $f_1, f_2, \ldots, f_k$ هي التكرارات ، فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

مثال : الجدول الآتي يعرض توزيع 40 تلميذ حسب أوزانهم ، احسب الوسط الحسابي ؟

فئات classes	32 -	41 -	50 -	59 -	68 -	77 -
تكرارات fi	4	8	9	11	5	3

الحل :

الفئات Classes	التكرارات fi	مركز الفئة xi	التكرار × مركز الفئة $xifi$
32 – 40	4	36	144
41 – 49	8	45	360
50 – 58	9	54	486
59 – 67	11	63	693
68 – 76	5	72	360
77 – 85	3	81	243
Total	$\sum fi = 40$		$\sum xifi = 2286$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum fi} = \frac{2286}{40} = 57.15$$

ثانياً : الوسيط The Median (M)

1 . الوسيط للبيانات غير المبوبة :

في كثير من الأحيان ينصب اهتمام الدارس على معرفة القيمة التي يكون عدد الأفراد الحاصلين على قيمة أقل منها مساوياً لعدد الحاصلين على قيمة أعلى منها ، فمثلاً عندما تحصل على درجة معينة في امتحان ما ، هل تقع درجتك في النصف الأول من الدرجات أم في النصف الثاني ؟ في مثل هذه الحالة عليك أولاً أن تعرف تلك الدرجة التي حصل نصف الطلبة على أقل منها ونصفهم الآخر على درجة أعلى منها . إذا عرفت هذه الدرجة يكون بإمكانك الإجابة على سؤالك السابق.

فمثلا إذا كانت الدرجات التي حصل عليها طلبة الصف هي :

20 , 6 , 14 , 10 , 9 , 7 , 20 , 18 , 11 , 10 , 19 , 17 , 12 , 13 , 8

فما هي الدرجة التي حصل نصف الطلبة على أقل منها والنصف الآخر على أعلى منها ؟ للإجابة عن هذا السؤال نرتب الدرجات ترتيباً تصاعدياً أي من الأصغر إلى الأكبر فيكون لدينا :

6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 17 , 18 , 19 , 20 , 20

من الواضح أن الدرجة المطلوبة هي (12) فهناك سبع درجات أصغر منها وسبع درجات أعلى منها ، وتسمى الدرجة (12) الوسيط ويرمز له بالرمز (**M**) .

تعريف : الوسيط لمجموعة من الأعداد المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها إذا كان فردياً ، والوسط الحسابي للعددين الأوسطين في المجموعة إذا كان عددها زوجياً . اي انه :

إذا كان $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مجموعة من الأعداد المرتبة ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) ، فإن الوسيط لهذه المجموعة هو العدد $x_{\frac{n+1}{2}}$ إذا كان n فردياً ، وهو العدد $\frac{1}{2}\left[x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right]$ إذا كان n زوجياً .

لاحظ أن $x_{\frac{n+1}{2}}$ هو العدد الذي رقمه (أو تسلسله) $\frac{n+1}{2}$ ، وأن $x_{\frac{n}{2}}$ هو العدد الذي رقمه (أو تسلسله) $\frac{n}{2}$ وذلك بعد ترتيب البيانات .

مثال : للبيانات الآتية ، احسب الوسيط :

4 ، 8 ، 4 ، 9 ، 10 ، 15 ، 2 ، 12 ، 3 ، 7 ، 5

الحل : البيانات هنا عددها فردي ، لذا عند حساب الوسيط يجب اولا ترتيب البيانات اما تصاعديا او تنازليا ، وسوف نرتبها تصاعديا كما يأتي :

2 ، 3 ، 4 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 12 ، 15

لاحظ أن عدد البيانات 11 ، أي فردي ، إذن : $\mathbf{M} = x_{\frac{n+1}{2}}$ وهو الموقع السادس ،

$$\therefore M = 7$$

مثال : للبيانات الآتية ، احسب الوسيط : 10 , 11 , 12 , 5 , 17 , 8 , 9 , 2 , 18 , 19

الحل : أن عدد البيانات (الأرقام) زوجي ، وبعد ترتيبها ترتيباً تصاعدياً تصبح :

2 ، 5 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 17 ، 18 ، 19

من الواضح أن العددين الأوسطين هما العددان الخامس والسادس أي في التسلسل الخامس والتسلسل السادس وهما العددين 10 ، 11 وفي هذه الحالة يكون الوسيط :

$$M = \frac{\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}{2} = \frac{(x_5 + x_6)}{2} = \frac{10+11}{2} = 10.5$$

لاحظ أن هناك خمسة أعداد أقل من 10.5 وهي 10 , 9 , 8 , 5 , 2 وخمسة أعداد أكبر منها وهي 19 , 18 , 17 , 12 , 11

2 . الوسيط للبيانات المبوبة :

بعد أن تعرفنا على طريقة إيجاد الوسيط من البيانات الخام (الغير مبوبة) نحتاج إلى معرفة طريقة إيجاد الوسيط للتوزيع التكراري ذي الفئات ، حيث يتم عرض كثير من البيانات بواسطة التوزيع التكراري . ولما كان الوسيط هو القيمة التي يكون عدد التكرارات الأقل منها مساوياً لعدد التكرارت الأعلى منها ، ففي هذه الحالة نحتاج الى معرفة التكرار المتجمع المقابل لأي فئة نحصل على هذا التكرار بإيجاد مجموع التكرارات التي تساوي قيمها الحد الأعلى الفعلي لتلك الفئة أو تقل عنه ، ونبدأ دائماً بالحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى ونعتبر تكرا ره المتجمع صفراً حيث لا توجد بيانات تقل قيمتها عن ذلك الحد أو تساويه . الوسيط للتوزيع التكراري هو :

$$M = a + \frac{\frac{n}{2} - n_1}{f_m} \times C$$

حيث ان :

n = مجموع التكرارات

C = طول الفئة الوسيطية

a = الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطية

f_m = تكرار الفئة الوسيطية

n_1 = التكرار المتجمع للفئة التي تسبق الوسيطية مباشرةً ، وبعبارة أخرى n_1 هو مجموع التكرارات التي تقل قيمها عن a .

اما الفئة الوسيطية فهي أول فئة يزيد تكرارها المتجمع عن $\frac{n}{2}$ أو يساويه .

<u>مثال :</u> احسب الوسيط للتوزيع التكراري الآتي :

فئات classes	32 -	36 -	40 -	44 -	48 -	52 -	56 -
تكرارات fi	10	6	8	4	8	9	15

الحل : لإيجاد الوسيط لمثل هكذا توزيع تكراري ، نجد التكرار المتجمع الصاعد أولاً من خلال الجدول :

الفئات Classes	Classes interval الحدود الفعلية	f_i التكرار	cumulative freq. التكرار المتجمع الصاعد
32 − 35	31.5 – 35.5	10	10
36 − 39	35. 5 – 39.5	6	16
40 − 43	39.5 – 43.5	8	24
44 − 47	43.5 – 47.5	4	28
48 − 51	47.5 – 51.5	8	36
52 − 55	51.5 – 55.5	9	45
56 − 59	55.5 – 59.5	15	60
total		60	

لاحظ أن عدد التكرارات n = 60 وطول الفئة c = 4 . نجد الفئة الوسيطية وهي أول فئة يكون تكرارها المتجمع الصاعد $\frac{60}{2}$ أو أكثر . ومن الجدول نجد أن الفئة الوسيطية هي 47.5 – 51.5 :

$$\therefore a = 47.5 \qquad n_1 = 28 \qquad f_m = 8$$

$$\therefore M = 47.5 + \frac{\frac{60}{2} - 28}{8} \times 4$$

$$= 47.5 + \frac{8}{8} = 48.5$$

ثالثا : المنوال (MQ) : The Mode

1. للبيانات غير المبوبة : المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكراراً في توزيع تكراري للقيم ، أي أن المنوال يكون تلك القيمة التي يقابلها أكبر تكرار في جوارها .

ملاحظة :

1 . إذا لم يكن هناك قيم يقابلها تكرار أكبر من غيرها ، فلا يكون هناك منوال .

2. وفي بعض الأحيان يكون هناك أكثر من منوال ، وتكرار كل منها أكبر من تكرار القيم في جواره .

مثال : جد المنوال للبيانات ادناه :

190 , 910 , 815 , 190 , 650 , 650 , 190 , 175 , 190 , 185 , 721 , 650 , 182

الحل : عند النظر إلى هذه الأرقام نجد منوالها هو 190 حيث أنه تكرر من غيره من القيم ، وأن 650 تتكرر أكثر من غيرها أيضاً ، ولذلك 190 منوال و 650 منوال آخر .

2 . المنوال للتوزيع التكراري (للبيانات المبوبة): أما في التوزيعات التكرارية (ذات البيانات وليست الفئات) فأنه يمكن اعتبار المنوال هو القيمة التي يقابلها تكرار أكبر من تكرارات القيم في جوارها . فمثلاً إذا كان التوزيع الآتي يمثل درجات 34 طالباً في أحد الامتحانات (الدرجة من 12) فإن الدرجة 7 هي منوال لأن تكرارها أكبر من تكرار القيم التي في جوارها ، وكذلك الدرجة 11 منوال لنفس السبب . كما هو واضح في الجدول الآتي :

الدرجة X	5	6	7	8	9	11	12	Total
تكرارات fi	2	3	9	4	5	8	3	35

أما في التوزيعات التكرارية ذات الفئات فإننا نعطي التعاريف الآتية :

1 . تسمى الفئة (أو الفئات) التي يقابلها أكبر تكرار ، الفئة المنوالية (الفئات المنوالية) .

2 . مركز الفئة المنوالية هو ((المنوال التقريبي approximate mode)) ، وإذا كان هناك عدة فئات منوالية فإنه يكون لدينا عدة فئات منوالية تقريبية .

<u>مثال :</u> جد المنوال أو المنوالات التقريبية للتوزيع التكراري الآتي :

Clsses الفئات	Freq. التكرار
25 – 29	5
30 – 34	7
35 – 39	8
40 – 44	15
45 – 49	9
50 – 54	12
55 – 59	4

<u>الحل :</u> واضح أن الفئة 44 – 40 فئة منوالية ؛ لأن تكرارها 15 وهو أكبر من تكرارات الفئات المجاورة له ولذلك فإن مركزها $42 = \frac{40+44}{2}$ هو منوال تقريبي .

وكذلك واضح أيضاً أن الفئة 54 – 50 فئة منوالية ‘ لأن تكرارها 12 أكبر من تكرارات الفئات المجاورة لها ، ولذلك فإن مركزها : $52 = \frac{50+54}{2}$ يعتبر منوال تقريبي أيضاً .

3 . إيجاد المنوال بطريقة بيرسون (حسابياً وبيانياً) :

وكذلك في حالة البيانات المبوبة أيضاً يمكن استخراج المنوال (حسابيا) بطريقة تدعى طريقة الفروق للعالم كارل بيرسون وحسب القانون الآتي :

$$MQ = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \times c$$

حيث أن :

$L_1 =$ الحد الأدنى الحقيقي للفئة المنوالية .

$\Delta_1 =$ الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها .

$\Delta_2 =$ الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي بعدها .

$C =$ طول الفئة المنوالية .

مثال : للبيانات الآتية ، جد المنوال حسابياً وبيانياً بطريقة بيرسون ؟

فئات classes	17 -	20 -	23 -	26 -	29 -	Total
تكرارات fi	5	10	15	6	4	40

الحل : 1 . المنوال **بالطريقة الحسابية** هو كالآتي :

نكون الجدول التكراري حيث يحتوي على الحدود الفعلية للفئات ونلاحظ من الجدول أدناه أن الفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار هي : 25 – 23

Clsses الفئات	Classes interval الحدود الفعلية	f_i التكرار
17 – 19	16.5 – 19.5	5
20 – 22	19.5 – 22.5	10
23 – 25	22.5 – 25.5	15
26 – 28	25.5 – 28.5	6
29 – 31	28.5 – 31.5	4
Total		40

$L_1 = 22.5 \qquad \Delta_1 = 15 - 10 = 5 \qquad \Delta_2 = 15 - 6 = 9 \qquad C = 3$

$$\therefore MQ = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$$

$$\therefore MQ = 22.5 + \frac{5}{5+9} \times 3$$

$$= 23.57$$

1 . المنوال **بالطريقة البيانية** : أما الطريقة البيانية فيمكن باستخدامها إيجاد المنوال عن طريق المدرج التكراري وكذلك عن طريق المضلع التكراري ، وسنكتفي بطريقة المدرج التكراري وحسب الخطوات الآتية :

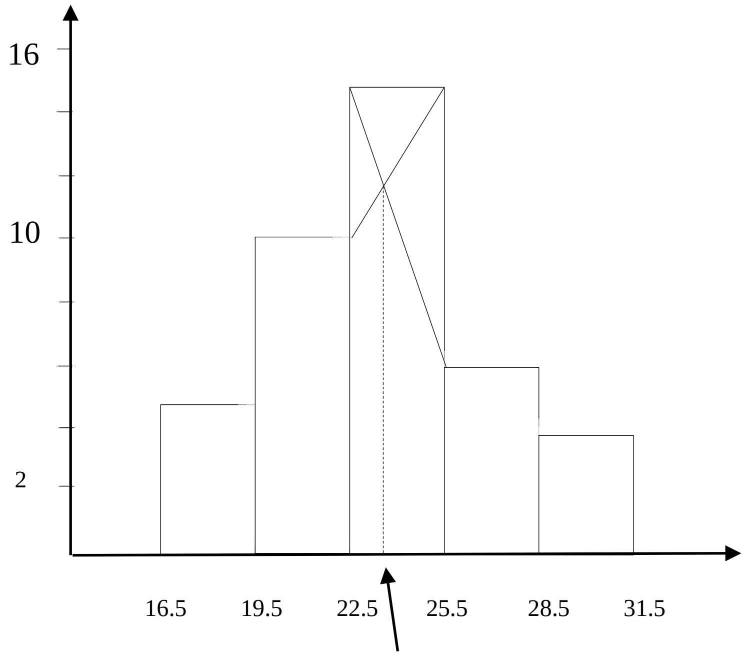
1 . نرسم المدرج التكراري من الجدول كما تعلمنا سابقاً .

2 . نصل الحد الأعلى للفئة المنوالية بالحد الأعلى للفئة التي قبلها .

3 . نصل بين الحد الأدنى للفئة المنوالية بالحد الأدنى للفئة التي بعدها .

4 . بعد ذلك ننزل عمود من نقطة تقاطع المستقيمين أعلاه على المحور الأفقي الذي يمثل الحدود الفعلية للفئات ، ونقطة التقاء ذلك العمود بالمحور الأفقي تمثل المنوال .

والرسم أدناه يمثل ذلك :



المنوال MQ

ويمكن حسابه بدقة بتقسيم الفئة المنوالية 22.5 - 25.5 إلى تقسيمات صغيرة

العلاقة التجريبية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال : هناك علاقة تربط فيما بين المتوسطات ، وهي أنه في التوزيعات التكرارية أحادية المنوال والملتوية التواءً بسيطاً وجد بالتجربة والمشاهدة المتكررة أن الوسيط يقع ما بين الوسط الحسابي والمنوال . والعلاقة هي :

$$(\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}) \cong 3 (\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})$$

أي ان :

$$Mean - Mode \cong 3\,(Mean - Median)$$

مقاييس التشتت Measures of Dispersion

أولاً : المدى والمدى الربيعي : The Range and Quartile Range

1 . للبيانات غير المبوبة :

تعريف : يُعرّف المدى في البيانات بأنه (الفرق بين أعلى قيمة وأصغر قيمة في البيانات) ، فإذا كان المدى صغيراً كانت البيانات محصورة في فترة قصيرة ، وإذا كانت المدى كبيراً كانت البيانات تقع ضمن فترة طويلة .إلى حدٍ

2 . للبيانات المبوبة : Grouped data

تعريف : يُعرّف المدى في البيانات المجمعة (التوزيع التكراري) بأنه الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا . ومن هذا التعريف يظهر أن المدى لا يعتمد على جميع البيانات بل على أكثر قيمة وأصغر قيمة فقط وهذا يقلل من أهميته إذ قد يحدث أن تكون القيمتان المتطرفتان (أكبر قيمة وأصغر قيمة) قيمتين شاذتين عندئذٍ يكون المدى كبيراً بينما مفردات البيانات ليست متباعدة عن بعضها البعض ، فمثلاً إذا كانت درجات الصف الثاني المتوسط لمادة معينة في مدرسة ما هي :

69،65،71،70،69،30،74،65،78،67،72،64،73،100،70،65،67،71،65، فإن المدى هو 70 = 30 – 100 ، بينما معظم الدرجات 64 ، 78 أي أنها متقاربة من بعضها البعض . وأنت تلاحظ من هذا المثال أن معظم درجات الصف كانت متقاربة إلى حدٍّ ما ، إلاّ أن المدى كان كبيراً . على ماذا تدل هذه الظاهرة ؟ إنها توضح أن المدى مقياس لا يُعتمد عليه كثيراً لتحديد تشتت البيانات . إذن كيف يمكن التخلص من هذا النقص ؟ إن إحدى الطرق للتخلص من ذلك هي حذف العلامات المتطرفة باعتبار أنها شاذة . احذف الدرجتين 30 و 100 فيصبح المدى للبيانات الجديدة :

14 = 64 – 78 .

إذا حذفت أعلى 25% من البيانات وأدنى 25% منها ثم حسبت المدى للبيانات الجديدة فإنك تحصل على **المدى الربيعي .**

تعريف : المدى الربيعي هو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول ، أي :

المدى الربيعي = الربيع الثالث – الربيع الاول

$$Quartile\ Range(QR) = Q_3 - Q_1$$

تعريف : نصف المدى الربيعي ويسمى الانحراف الربيعي $Quartile\ Deviation$ ويساوي :

$$Quartile Deviation(QD) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)} = \frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الاول}}{2}$$

والربيعات هي عبارة عن ثلاث قيم تقسم التوزيع الى اربعة اقسام متساوية وهي الربيع الاول ، والربيع الثاني ، والربيع الثالث ويرمز لها بالرموز Q_1 , Q_2 , Q_3 على التوالي . ويلاحظ ان الوسيط عبارة عن الربيع الثاني حيث انه يقسم المساحة تحت المنحني الى قسمين متساويين .

ولإيجاد أيٍ من الربيعات الثلاث نتبع ما يأتي :

1 . نجد رتبة الربيع وتكون : $\frac{n\times}{4}$ حيث ان قيم r تكون (1 ، 2 ، 3) للربيعات الثلاث على التوالي

2 . نجد قيمة الربيع باستخدام القانون الآتي : $Q_r = a + \frac{\frac{n\times r}{4} - f_1}{f_2 - f_1} \times c$

حيث ان :

a : الحد الاعلى الحقيقي التي يقع عليها الربيع او بعدها .

n : عدد البيانات او التكرارات .

f_1 : تكرار الفئة (a) التي تمثل مرتبة الربيع او التي اقل منه .

f_2 : تكرار الفئة اللاحقة للفئة ذات التكرار $_1$.

c : طول الفئة .

مثال : اوجد نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي) للتوزيع التكراري الاتي :

فئات classes	82 -	90 -	98 -	106 -	114 -	122 -
تكرارات fi	2	7	12	15	10	4

الحل : نكون جدول التوزيع التكراري وفيه التكرار المتجمع الصاعد :

الفئاتClasses	f_i التكرار	Classes interval الحدود الفعلية	cumulative freq. التكرار المتجمع الصاعد
82 − 89	2	81.5 – 89.5	2
90 − 97	7	89. 5 – 97.5	9
98 − 105	12	97.5 – 105.5	21
106 − 113	15	105.5 – 113.5	36
114 − 121	10	113.5 – 121.5	46
122 − 129	4	121.5 – 129.5	50
total	50		

نجد الآن رتبة الربيع الاول والتي تمثل الموقع $\frac{n\times1}{4} = \frac{50\times1}{4} = 12.5$ ، في الفئة الثانية

نجد قيمة الربيع باستخدام القانون :
$$Q_r = a + \frac{\frac{n\times r}{4} - f_1}{f_2 - f_1} \times c$$

$97.5 = a \qquad 50 = n \qquad 9 = f_1 \qquad 21 = f_2 \qquad 8 = c$

$$\therefore Q_1 = 97.5 + \frac{12.5-9}{21-9} \times 8 = 99.8$$

ثم نجد الآن رتبة الربيع الثالث والتي تمثل الموقع $\frac{n\times 3}{4} = \frac{50\times 3}{4} = 37.5$ ، في الفئة الرابعة

$113.5 = a \qquad 50 = n \qquad 36 = f_1 \qquad 46 = f_2 \qquad 8 = c$

$$\therefore Q_3 = 113.5 + \frac{37.5-36}{46-36} \times 8 = 114.7$$

وبعد ان وجدنا الربيع الاول والربيع الثالث ، نطبق القانون الآتي لنجد نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي) :

$$\text{نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)} = \frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الاول}}{2}$$

$$= \frac{99.5 - 114.5}{2} = 7.75$$

ثانياً : التباين والانحراف المعياري : Variance and Standard Deviation

1 . **للبيانات غير المبوبة :** إن أحد مقاييس التشتت التي تخطر على البال هو مجموع انحرافات البيانات عن وسطها الحسابي ، أي $\sum(x_i-\bar{x})$ لكن هذا المجموع يساوي صفراً دائماً ، ولذلك لابد من حذف الإشارة السالبة لنحصل على مقياس ذي معنى . وإحدى الطرق التي تزيل بها الإشارة السالبة هي بتربيع الانحرافات ونحن نستعمل مربعات الانحرافات هذه في حساب التباين .

يعرف التباين على أنه : $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ حيث $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي .

<u>مثال :</u> احسب التباين للبيانات الآتية : 4 , 8 , 6 , 7 , 5 , 8 , 4 , 9 , 7 , 2

<u>الحل :</u> نجد الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة وكالآتي :

$$\bar{x} = \frac{4+8+6+7+5+8+4+9+7+2}{10} = 6$$

نجد فروق البيانات عن الوسط الحسابي ثم نربع تلك الفروق ونجمعها ونقسم على (n) فنجد التباين :

$$S^2 = \frac{(4-6)^2+(8-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(5-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(9-6)^2+(7-6)^2+(2-6)^2}{10-1}$$

$$= \frac{4+4+0+1+1+4+4+9+1+16}{9}$$

$$= \frac{44}{9} = 4.88$$

والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين ، أي أن :

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

2 . **للبيانات المبوبة :** إذا كانت مراكز فئات توزيع تكراري $x_1, x_2, \dots\dots, x_h$ وكانت التكرارات المقابلة لها $f_1, f_2, \dots\dots, f_h$

فالتباين S^2 يكون :

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{h} f_i(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

مثال : احسب التباين للبيانات في الجدول الآتي

فئات classes	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -
تكرارات fi	6	5	12	9	8

الحل : نكون الجدول الآتي بحيث نجد مراكز الفئات ونضرب كل مركز بالتكرار المقابل له لكي نحسب الوسط الحسابي ثم نجد الانحرافات ونربعها هذه ونضرب كلاً منها بالتكرار المقابل لها كما في الجدول الآتي :

X_i مركز الفئة	f_i التكرار	$X_i f_i$	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
32	6	192	-11	121	726
37	5	185	-6	36	180
42	12	504	-1	1	012
47	9	423	4	16	144
52	8	416	9	81	648
	40	1720			1710

نجد الوسط الحسابي : $\bar{x}=\frac{1720}{40}$ ، ثم نجد التباين : $S^2=\frac{1710}{39}=43.85$

أما الإنحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين ، أي أن : $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{43.85}=6.6219$

والإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين ، أي :

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

الطريقة المختصرة Abbreviated Method : إن طريقة حساب التباين والإنحراف المعياري طويلة وتحتاج إلى حساب أرقام كثيرة ، وبخاصة إذا احتوى الوسط الحسابي على كسور ، لأن ذلك يستوجب أن تحتوي الانحرافات على كسور ، وبالتالي فإننا نحتاج إلى تربيع تلك الكسور .وهناك طريقة مختصرة لحساب التباين والإنحراف صالحة للاستعمال بالآلة الحاسبة مباشرة وتعطى بالنظرية الآتية :

التباين والإنحراف المعياري للبيانات غير المبوبة

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\left[\sum x_i^2-n\bar{x}^2\right]}$$

التباين والإنحراف المعياري للبيانات المبوبة

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\left[\sum x_i^2 f_i-n\bar{x}^2\right]}$$

حيث $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي ، و n = مجموع التكرارات

مثال : استخدم نفس البيانات في المثال السابق لحساب التباين والإنحراف المعياري بالطريقة المختصرة :

الحل : نرتب الحل كما في الجدول الآتي : :

X_i مركز الفئة	f_i التكرار	X_if_i	(x_i^2)	$(x_i^2 f_i)$
32	6	192	1024	6144
37	5	185	1369	6845
42	12	504	1764	21168
47	9	423	2209	19881
52	8	416	2704	21632
total	40	1720		75670

نلاحظ أن : $\bar{x}=\frac{1720}{40}$ ، نعوض في القانون فنجد التباين :

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 f_i-n\bar{x}^2\right]$$

$$=\frac{1}{39}\cdot\left[75670-(40\times 43^2)\right]$$

$$=\frac{1710}{39}=43.85$$

أما الانحراف المعياري فهو : $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{43.85}=6.6219$

نلاحظ أن النتائج التي حصلنا عليها باستخدام الطريقة المختصرة في المثال السابق هي نفس النتائج في هذا المثال

الإرتباط البسيط : Simble Correlation

مقدمة : لقد بحثنا في المواضيع السابقة بعض المسائل المتعلقة بقياسات ومشاهدات عن متغير واحد ، وبعبارة أخرى انحصرت دراستنا في موضوع ظاهرة واحدة أي أن البيانات التي كانت لدينا كانت قياسات أو مشاهدات من نوع واحد تم تسجيلها عن مجموعة من الأفراد أو العناصر . فمثلاً : كانت البيانات عن درجات مجموعة من الطلاب في أحد الامتحانات أو أي ظاهرة أخرى ، ونلاحظ أن دراستنا كانت عن وضع هذه البيانات في توزيع تكراري ، أو حساب مقاييس النزعة المركزية لها أو مقاييس التشتت وفي مثل هذه الحالة تكون دراستنا عن متغير واحد أو متغير ذي البعد الواحد .

أما الآن فندرس قياسين عن كل عنصر من العناصر قيد الدرس ، كأن نسجل طول ووزن كل طالب في إحدى إحدى المدارس ومن ثم ندرس العلاقة بين هذين القياسين أو المتغيرين وفي كثير من الأحيان نعبر عن المتغيرين عبارة (متغير ذو بعدين) . والأمثلة على ذلك كثيرة فقد تحتاج إلى معرفة العلاقة بين التحصيل في الإمتحان النهائي لدى الطالب في فصل معين وبين عدد الساعات التي درسها الطالب في تحضيره لذلك الإمتحان ، في هذه الحالة نسجل قيمتين أو مشاهدتين عن كل طالب ، الأولى عدد ساعات الدراسة والثانية درجة الطالب في الامتحان النهائي وبذلك نكون قد سجلنا زوجاً مرتباً من القيم عن كل طالب . فإذا عبّرنا عن عدد ساعات بالحرف X ، ودرجة الطالب بالحرف Y ، نحصل على ما يأتي : (x_1 , y_1) الزوج المرتب الخاص بالطالب الأول ، (x_2 , y_2) الزوج المرتب الخاص بالطالب الثاني ، وهكذا حتى نصل إلى (x_n , y_n) الذي يمثل الزوج المرتب الخاص بالطالب الذي رقمه n.

ويمكن وضع مثل هذه القياسات على شكل جدول كما يأتي :

X	6	13	19	8	10	3	7	1	15
Y	67	75	86	61	71	50	62	40	80

وهذا يعني أن عدد ساعات دراسة الطالب الأول كان 6 ساعات ، ودرجته 67 ، أما الطالب الثاني فدراسته 13 ساعة ودرجته 75 ، فيما نجد أن دراسة الطالب السادس يساوي 3 ودرجته 50 .

وسوف ندرس هنا العلاقة بين المتغيرين X , Y والذي تكون قيمهما على شكل أزواج مرتبة ، وبدراسة هذه العينة من الأزواج المرتبة نريد الإجابة عن السؤال :

هل هناك علاقة بين المتغيرين ؟ وهل هي خطية أم غير خطية ؟ أي هل نستطيع أن نحكم أن النقاط (x , y) تقع على خط مستقيم أم لا تقع ؟

معنى الإرتباط : للإجابة عن السؤال أعلاه نقول أن الإرتباط هو تلك العلاقة التي تربط بين متغيرين أو أكثر ، أو ظاهرتين أو أكثر مثل العلاقة بين دخل الفرد وتوفيره الشهري ، أو درجات طالب في الثانوية العامة ودرجاته في الإمتحانات الفصلية .

أنواع الإرتباط : يقسم الإرتباط من حيث :

أ. عدد المتغيرات

1. الإرتباط البسيط : وهذا الإرتباط يتضمن متغيرين فقط مثل طول الشخص ووزنه ، أو الإعلانات التجارية وكمية المبيعات .
2. الإرتباط المتعدد : وفيه ندرس أكثر من متغيرين مثل ثمن البيت والذي يعتمد سعره على المساحة وعمر البناء والموقع .

ب. من حيث شكل العلاقة الرياضية

1. إرتباط خطي .
2. إرتباط غير خطي .

حساب معامل الإرتباط : تقاس درجة الإرتباط عادة بقيمة عددية تتراوح بين -1 ، +1 فكلما إبتعدت عن الصفر بإتجاه +1 أو -1 دل ذلك على وجود إرتباط أكبر حيث يكون الإرتباط طردي إذا كانت القيمة موجبة ، ويكون عكسي إذا كانت القيمة سالبة أما إذا كانت قيمة الإرتباط صفراً فإنه يدل على عدم وجود إرتباط .

مؤشرات الإرتباط :

هناك مؤشران لوجود الارتباط وقوته هما :

1. معامل بيرسون للارتباط .
2. معامل سبيرمان (معامل إرتباط الرتب) .

وسنتناول في دراستنا هنا المؤشر الثاني (معامل سبيرمان) .

معامل إرتباط سبيرمان للرتب : Spearman's Coefficient of Rank Correlation

كثيراً ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها إستخدام طريقة بيرسون ، ويستخدم أيضا في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية .

نجد معامل إرتباط سبيرمان من العلاقة الآتية :

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

حيث أن : n = عدد الأزواج المرتبة لقيم (X , Y) .
d = الفرق بين رتب X و Y .

نلاحظ من التعريف أعلاه أنه يمكن حساب قيمة r_s إذا عرفت الرتب أو إذا عرفت البيانات التي يمكن ترتيبها ويصلح هذا المعامل بوجه خاص إذا كان عدد أزواج البيانات ما بين 25 و 30 أو أقل .

مثال : إحسب معامل إرتباط سبيرمان للرتب للمتغيرين X و Y ؟

X	77.5	85.5	79.9	88.8	93.5	85.0	94.1	90.5	87.2	89.8
Y	61.0	72.8	65.5	71.0	80.0	74.5	82	81	76.1	78.0

الحل : نرتب قيم X بحيث نعطي الرتبة 1 لأعلى قيمة و هكذا ، ونرتب قيم Y بالمثل

ثم نجد الفرق بين رتبتي كل زوج مرتب من X و Y وكما يأتي : :

رُتب X :

X	77.5	85.5	79.9	88.8	93.5	85.0	94.1	90.5	87.2	89.8
الرتب	10	7	9	5	2	8	1	3	6	4

رتب Y :

Y	61.0	72.8	65.5	71.0	80.0	74.5	82	81	76.1	78.0
الرتب	10	7	9	8	3	6	1	2	5	4

نجد الآن الفرق بين رتب X و Y ثم نربع ذلك الفرق لإيجاد معامل سبيرمان r_s :

رتب X	رتب Y	الفرق بين الرتب d	d^2
10	10	0	0
7	7	0	0
9	9	0	0
5	8	-3	9
2	3	-1	1
8	6	2	4
1	1	0	0
3	2	1	1
6	5	1	1
4	4	0	0
total			16

$$\longrightarrow \quad r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\,(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\times 16}{10\times 99}$$

$$\therefore\ r_s = 0.90$$

من خلال النتيجة أعلاه نستنتج أن العلاقة بين Y و X هي علاقة طردية قوية .

في المثال أعلاه لم تظهر قيم متساوية في أي من X أو Y ، أما إذا ظهرت بيانات متساوية فيكون تعيين بيانات الرتب لهذه البيانات بإتباع الخطوتين :

1. نرتب البيانات كما لو أن ليس فيها بيانات متساوية .
2. نأخذ الوسط الحسابي لرتب كل مجموعة من البيانات المتساوية ونعتبر هذا الوسط الحسابي رتبة كل بيان في هذه المجموعة . وكما في المثال الآتي :

مثال : عين الرتب للقيم الآتية :

70 , 79 , 63 , 70 , 63 , 65 , 63 , 57 , 53 , 57 , 45

الحل : نرتب البيانات تنازلياً ونعين الرتب وكما يأتي :

القيم : 79 70 70 65 63 63 63 57 57 53 4

الرتب : (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)
(11)

نجد الوسط الحسابي لرتب القيم 70 و 70 وهو 2.5

ونجد الوسط الحسابي لرتب القيم 63 , 63 , 63 وهو 6 . ونجد الوسط الحسابي لرتب القيم 57 , 57 وهو 8.5 ، وتكون الرتب كما في الجدول أدناه :

القيمة	45	57	53	57	63	65	63	70	63	79	70
الرتبة	11	8.5	10	8.5	6	4	6	2.5	6	1	2.5

وبعد ترتيب البيانات وإيجاد رتبها يمكن إيجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب (إذا كان مطلوباً في السؤال بالطريقة التي استخدمت بالحل في المثال السابق وإنشاء جدول الرتب كالجدول في الصفحات السابقة